

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

В.Ю. БЕЛАШОВ

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ТЕОРИЯ И ЭМС ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ

Часть I. Электромагнитная теория

Белашов В.Ю. Электромагнитная теория и ЭМС электротехнических устройств. Ч. 1. Электромагнитная теория. Учебное пособие. Казань: Казан. гос. энерг. ун-т, 2007. 122 с.

Учебное пособие предназначено для изучения дисциплины "Электромагнитная теория и ЭМС электротехнических устройств" и включает в себя разделы, относящиеся к наиболее важной и фундаментальной части курса – электромагнитной теории. Использование представленного материала даст возможность обучающимся и специалистам в области электротехники успешно решать широкий класс задач, возникающих на стадии проектирования электротехнических устройств и систем и связанных с расчетом и моделированием электрического и магнитного полей, возбуждаемых этими устройствами и системами, а также решать проблемы минимизации воздействия на них внешних электромагнитных полей различного происхождения. Учебное пособие включает основные разделы теории электромагнетизма, такие как уравнения Максвелла, свойства сред, граничные условия, энергия электромагнитного поля, классы электромагнитных явлений, электромагнитные волны. Изложение теории снабжено многочисленными поясняющими иллюстрациями. В приложении представлен материал, необходимый при изучении курса: приведено краткое изложение элементов векторной алгебры и векторного анализа, а также даны формулы вычисления средних величин.

Книга предназначена для студентов, обучающихся по специальности 140610 – «Электрооборудование и электрохозяйство предприятий, организаций и учреждений». Представленный в книге материал может быть также полезен студентам и аспирантам широкого круга физико-математических специальностей при изучении ими дисциплин, связанных с электродинамикой, теорией электромагнетизма и распространением радиоволн, а также преподавателям, ведущим соответствующие курсы, и специалистам, работа которых требует применения методов электродинамики для решения соответствующих физических и технических задач.

Ил. 64. Библиогр.: 14 назв.

Рецензенты: докт. физ. - матем. наук, заведующий кафедрой радиоэлектроники
Казанского государственного университета профессор Насыров А.М.
докт. техн. наук, профессор Корнилов В.Ю.

© Белашов В.Ю., 2007 г.

© Казанский государственный энергетический университет, 2007 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	5
Глава 1. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА	7
1. Явления электромагнетизма и электромагнитное поле. Система единиц.	7
2. Уравнения Максвелла (первая пара уравнений)	10
2.2. <i>Обобщенный закон электромагнитной индукции</i>	11
2.2. <i>Ток и магнитное поле</i>	13
3. Уравнения Максвелла (вторая пара уравнений).....	15
3.1. <i>Уравнение непрерывности и ток смещения</i>	16
3.2. <i>Соотношение первой и второй пары уравнений Максвелла</i>	18
4. Система уравнений Максвелла	19
4.1. <i>Понятие о прямой и обратной задачах электродинамики</i>	20
Глава 2. СВОЙСТВА СРЕД	22
1. Виды сред и их свойства. Поляризация и намагничивание	22
2. Электропроводность.....	26
Глава 3. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ	30
1. Нормальные компоненты векторов поля	30
2. Касательные (тангенциальные) компоненты векторов поля	33
3. Граничные условия.....	36
Глава 4. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ.....	37
1. Предварительные замечания	37
2. Закон Джоуля-Ленца	38
3. Действие источников.....	39
4. Уравнение баланса энергии	41
5. Вектор Пойнтинга и баланс энергии	43
6. Энергия электромагнитного поля	45
7. Смысл вектора Пойнтинга $\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$	46
Глава 5. КЛАССЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ЯВЛЕНИЙ	48
1. Электростатика.....	49
1.1. <i>Уравнения электростатики и электростатический потенциал</i>	49

1.2. Простейшие электростатические поля	52
2. Проводники и диэлектрики электростатическом поле	57
2.1. Поля, потенциалы и заряды	57
2.2. Граничные задачи электростатики	60
2.3. Емкость	62
2.4. Энергия электростатического поля	64
3. Стационарное магнитное поле	67
3.1. Вводные замечания	67
3.2. Магнитостатика	69
3.3. Скалярный и векторный потенциалы	70
3.4. Простейшие стационарные магнитные поля	72
3.5. Энергия стационарного магнитного поля	73
4. Квазистационарные токи и поля	76
4.1. Условия квазистационарности	76
4.2. Уравнения Максвелла	77
4.3. Энергия квазистационарного поля и цепь переменного тока	80
5. Электромагнитное поле, гармоническое во времени	82
5.1. Основные уравнения электродинамики	82
5.2. Баланс энергии при гармонических колебаниях	90
Глава 6. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ	95
1. Общие сведения	95
1.1. Вводные замечания	95
1.2. Гармонические волны	97
1.3. Виды волн	98
2. Плоские однородные электромагнитные волны	100
2.1. Одномерный гармонический электромагнитный процесс	101
2.2. Волны в идеальном диэлектрике	102
2.3. Волны в поглощающих средах	104
ПРИЛОЖЕНИЕ	108
1. Элементы векторной алгебры и векторного анализа	108
1.1. Векторы (векторная алгебра)	108
1.2. Некоторые формулы векторного анализа	113
2. Формулы вычисления средних величин	121
ЛИТЕРАТУРА	122

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие предназначено служить основным учебным материалом при изучении дисциплины "Электромагнитная теория и электромагнитная совместимость электротехнических устройств". Оно включает в себя разделы, относящиеся к наиболее важной и фундаментальной части курса – электромагнитной теории.

Основной целью этого курса является изучение как собственно электродинамической теории, базирующейся на системе уравнений Максвелла, методов исследования этих уравнений, многочисленных следствий теории и некоторых ее приложений (например, при изучении распространения электромагнитных волн в различных средах), так и обеспечения электромагнитной совместимости электротехнических устройств.

В книге систематически излагается теория электромагнетизма, включая такие основные разделы теории, как уравнения Максвелла, свойства материальных сред, граничные условия, энергия электромагнитного поля, классы электромагнитных явлений (электростатика, стационарное магнитное поле, квазистационарные токи и поля, электромагнитное поле, гармоническое во времени, проводники и диэлектрики в электромагнитных полях), электромагнитные волны, включая вопросы их распространения в поглощающих средах. Изложение теории снабжено многочисленными поясняющими иллюстрациями. В приложении представлен материал, необходимый при изучении курса: приведено краткое изложение элементов векторной алгебры и векторного анализа, а также даны формулы вычисления средних величин.

Использование представленного в книге материала даст возможность обучающимся и специалистам в области электротехники успешно решать широкий класс задач, возникающих на стадии проектирования электротехнических устройств и систем и связанных с расчетом и моделированием электрического и магнитного полей, возбуждаемых этими устройствами и системами, а также решать проблемы минимизации воздействия на них внешних электромагнитных полей различного происхождения.

Предполагается, что в процессе изучения курса студенты должны овладеть теоретическим материалом и освоить практические навыки использования соответствующего математического аппарата при решении задач электродинамики, усвоить приемы и методы решения электродинамических задач. В рамках практического курса должны быть решены задачи по каждому из изученных разделов, обширный перечень которых приведен в недавно изданном пособии (задачнике) автора¹. Таким образом, в результате изучения и усвоения данного курса обучающиеся должны как приобрести знания по теории электродинамики, методам решения соответствующих задач, используе-

¹ Задачник В.Ю. Белашова и Р.Р. Чураева – см. список литературы в конце книги.

мым в теоретической физике и электротехнике, так и получить практические навыки использования соответствующей математической техники.

Пособие ориентировано, главным образом, на студентов, обучающихся по специальности 140610 – «Электрооборудование и электрохозяйство предприятий, организаций и учреждений», однако автор полагает, что, в связи с достаточной общностью изучаемых в книге вопросов, представленный здесь материал может быть также полезен студентам и аспирантам широкого круга физико-математических специальностей при изучении ими дисциплин, связанных с электродинамикой, теорией электромагнетизма и распространением радиоволн, а также преподавателям, ведущим соответствующие курсы, и специалистам, работа которых требует применения методов электродинамики для решения соответствующих физических и технических задач.

В заключение автор выражает благодарность своим помощникам: студентам КГЭУ Хальфиевой А.С. и Ларионову С.Н., выполнившим большой объем технической работы при подготовке рукописи к изданию.

Февраль 2007 г.

В. Белашов

Глава 1

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

1. Явления электромагнетизма и электромагнитное поле.

Система единиц

При всем многообразии электромагнитных явлений существует теоретическое понятие, позволяющее говорить об их единой основе. Это понятие электромагнитного поля, которое формально отображается некоторыми векторными функциями координат и времени.

Чтобы пояснить физическое содержание понятия электромагнитного поля, можно привести следующий пример.

В вакууме помещены две антенны – передающая и приемная. Передача электромагнитной энергии производится в течение короткого интервала времени τ , а время, за которое энергия достигает приемной антенны $\Delta t > \tau$ (возможно даже $\Delta t \gg \tau$). В таком случае можно указать время, когда энергия уже излучена передающей антенной, но еще не поступила в приемную, т.е. локализована в вакууме. Носитель этой энергии – не привычная нам материальная среда, а иная физическая реальность – электромагнитное поле. В философском смысле электромагнитное поле следует рассматривать как одну из форм существования материи.

В основе всех возможных явлений электромагнетизма лежат превращения энергии, связанной с полем.

Электромагнитным полем называется область пространства, в которой проявляется действие электрических и магнитных сил.

Электромагнитное поле, как в вакууме, так и в среде, создается зарядами и токами.

Из курса общей физики нам уже знакомы понятия электрического заряда q [Кл] и тока проводимости I [А].

Отвлекаясь от строения материи, будем говорить о непрерывном распределении заряда и тока в объеме, при этом оказываются полезными следующие понятия:

- *Объемная плотность заряда*

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}, \quad [\rho] = \text{Кл}/\text{м}^3, \quad (1.1)$$

где Δq – заряд заключенный в объеме ΔV .

Из формулы (1.1) видно, что заряд, заключенный в элементе объема dV , равен

$$dq = \rho dV.$$

▪ *Плотность тока.* Плотностью тока в данной точке называется вектор, совпадающий по направлению с током, модуль которого равен:

$$|j| = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S}, \quad [j] = \text{А/м}^2, \quad (1.2)$$

где ΔI – сила тока протекающего через площадку ΔS , расположенную перпендикулярно \mathbf{I} в данной точке.

Из формулы (1.2) следует, что сила тока ΔI , протекающего через площадку ΔS , определяется скалярным произведением:

$$d\mathbf{I} = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}.$$

Как объемная плотность заряда ρ , так и плотность тока является функциями $f(\mathbf{r}, t)$.

На заряды и токи в электромагнитном поле действуют силы, но чтобы их описать, необходимо ввести величины, описывающие само электромагнитное поле.

Электромагнитное поле описывают при помощи векторных функций координат и времени:

$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ – напряженность электрического поля, [В/м];

$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ – электрическая индукция, [Кл/м²];

$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ – напряженность магнитного поля, [А/м];

$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ – магнитная индукция, [Тл] = [Вб/м²].

Эти векторы не являются независимыми, а связаны соотношениями:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (1.3)$$

где ε и μ – абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемость.

Отметим, что в отношении электромагнитных величин система СИ совпадает с рационализованной системой единиц МКСА, в основе которой лежат метр, кг, секунда и Ампер. Размерность проницаемостей следующая:

$$[\varepsilon] = \frac{\text{А}^2 \cdot \text{с}^4}{\text{кг} \cdot \text{м}^3} = \frac{\text{Кл}^2}{\text{Дж} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Ф}}{\text{м}},$$

$$[\mu] = \frac{\text{м} \cdot \text{кг}}{\text{А}^2 \cdot \text{с}^2} = \frac{\text{м} \cdot \text{кг}}{\text{Кл}^2} = \frac{\text{Гн}}{\text{м}}.$$

Для поля в вакууме: $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$ – постоянные коэффициенты, величины которых определяются выбранной системой единиц.

Электрическая постоянная

$$\varepsilon_0 = 10^7 / 4\pi c^2 \approx 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}. \quad (1.4a)$$

Для получения магнитной постоянной можно воспользоваться известным из теории соотношением:

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c; \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \approx 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м} \quad (1.4б)$$

Абсолютная диэлектрическая и магнитная проницаемость может быть с учетом формул (1.4) представлена через относительные диэлектрические и магнитные проницаемости:

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0, \quad \mu = \mu_r \mu_0,$$

ε_r, μ_r – безразмерные величины, численно равные диэлектрической и магнитной проницаемости в абсолютной Гауссовой системе единиц (СГСЭ – для электрических и СГСМ – для магнитных величин). Диэлектрическая и магнитная проницаемости в общем случае являются функциями координат:

$$\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r}),$$

$$\mu = \mu(\mathbf{r}).$$

Для электромагнитного поля в анизотропной среде ε и μ – тензорные величины.

Итак, электромагнитное поле характеризуется четырьмя векторными величинами \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{H} , \mathbf{B} , которые меняются как со временем, так и от точки к точке. Это изменение совершается не произвольно, а по некоторым законам. По вполне определенным законам происходит и порождение электромагнитного поля зарядами и токами. Все эти законы формулируются в форме уравнений Максвелла, которым подчиняются величины, характеризующие электромагнитное поле.

Первоначально, законы электромагнитных явлений выражались в виде соотношений, относящихся к различным точкам пространства. Например, закон Кулона записан для силы, действующей между зарядами, находящимися в различных точках пространства. Закон Ома определяет соотношение между величинами, относящимися к целому участку проводника. И так далее.

Уравнения Максвелла формулируют законы электромагнитного поля в виде соотношения между величинами *в одной и той же точке в один и тот же момент времени*. Отсюда следует, что эти законы должны быть записаны дифференциальной форме.

Наряду с дифференциальной, существует также интегральная форма записи законов электромагнитного поля, которая в некоторых случаях является более удобной. Такая форма записи законов устанавливает соотношение между величинами, относящимися к линиям, поверхностям и объемам, и получается из дифференциальной путем интегрирования дифференциальных уравнений.

2. Уравнения Максвелла (первая пара уравнений)

Основными являются следующие два уравнения в частных производных относительно векторных функций \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{D} , \mathbf{B} и \mathbf{j} :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Каждое из этих уравнений представляет сокращенную запись трех уравнений (скалярных), которые получаются, как только выбрана некоторая система координат и входящие в (1.5) векторы спроектированы на соответствующие орты – тогда возникают так называемые «уравнения Максвелла в координатной форме».

Расписывая дифференциальные операторы *rot* в декартовых, цилиндрических, сферических и так далее координатах, можно получить различные формы записи уравнений (1.5).

Запишем теперь два интегральных соотношения:

$$\begin{aligned} \oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} &= \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} ds + \int_S \mathbf{j} ds, \\ \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} &= -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} ds. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Эти равенства, как мы далее покажем, являются интегральными аналогами уравнений (1.5). Здесь S – некоторая поверхность, L – ее контур, векторные дифференциалы $d\mathbf{l}$ и ds имеют стандартный смысл:

$$ds = \mathbf{v}_0 ds, \quad d\mathbf{l} = \boldsymbol{\tau}_0 dl,$$

\mathbf{v}_0 и $\boldsymbol{\tau}_0$ – единичные векторы внешней нормали и внешней касательной.

Итак, мы сформулировали первые два уравнения Максвелла (основные) в дифференциальной и интегральной формах.

Было бы интересно узнать, как именно развитие физических идей привело к уравнениям Максвелла – однако это нелегкий труд и он отнял бы у нас очень много времени.

Важно подчеркнуть следующее. Значение уравнений Максвелла (записанных, а также некоторых других, которые мы рассмотрим позже) состоит в том, что *они в компактной форме заключают в себе все основания электромагнетизма, причем сама теория выводится из уравнений дедуктивным путем, т.е. получается как система следствий.*

Уравнения Максвелла, таким образом, играют роль *основных постулатов теории* и, следовательно, *не подлежат выводу* (доказательству). Их оп-

равдание – во всей совокупности данных об электромагнитных явлениях, которыми располагает современная физика.

Аналогично, в классической механике вводятся уравнения Ньютона.

Разумеется, физическое содержание уравнений Максвелла можно охватить в должной мере, лишь изучив теорию электромагнетизма, т.е. ознакомившись со всеми главными следствиями из них. Однако общие черты их физического содержания можно воспринять уже при самом беглом анализе. Сделаем это для записанных нами уравнений Максвелла.

2.2. Обобщенный закон электромагнитной индукции

Рассмотрим второе уравнение Максвелла в дифференциальной форме. Правая часть выражает скорость изменения во времени магнитной индукции \mathbf{B} , а в левой части под знаком дифференциального оператора rot содержатся только пространственные производные компонент напряженности электрического поля \mathbf{E} .

Таким образом, можно заключить, что пространственные изменения \mathbf{E} и временные изменения \mathbf{B} связаны.

Пусть электрическое поле отсутствует, т.е. $\mathbf{E} = 0$. Тогда $\text{rot} \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \partial \mathbf{B} / \partial t = 0$, а это значит, что в отсутствие электрического поля магнитное поле может быть только постоянным. Но всякое изменение магнитного поля ($\partial \mathbf{B} / \partial t \neq 0$) неизбежно вызывает электрическое поле, так как тогда $\text{rot} \mathbf{E} \neq 0$ и следовательно $\mathbf{E} \neq 0$.

Подчеркнем, что второе уравнение в дифференциальной форме дает локальную характеристику полей \mathbf{E} и \mathbf{B} в некоторой точке пространства $M(\mathbf{r})$ в некоторый момент t .

Рассмотрим теперь второе уравнение в интегральной форме и попробуем понять вначале его связь с уравнением в дифференциальной форме.

Пусть имеется некоторая поверхность S с контуром L (рис. 1.1). Вычислим поток вектора в левой и правой частях дифференциального уравнения (1.5-2):

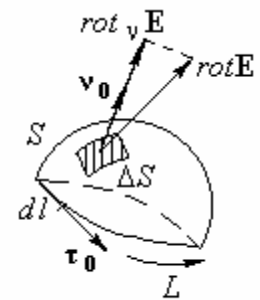


Рис. 1.1



Рис. 1.2

$$\int_S \text{rot} \mathbf{E} ds = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} ds.$$

Применяя далее слева теорему Стокса, получим:

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} ds. \quad (1.7)$$

Интересно, что при фиксированном контуре L правая часть (1.7) никак не изменяется при любых изменениях «натянутой на контур» поверхности S (рис. 1.2).

Оператор временного дифференцирования можно вынести за знак интеграла (так как контур L считаем неизменным). А поскольку сам интеграл зависит только от t , символ частной производной $\partial/\partial t$ заменим на d/dt . В результате приходим ко второму уравнению Максвелла в интегральной форме.

Согласно второму уравнению Максвелла в интегральной форме (1.6-2) циркуляция напряженности электрического поля по произвольному контуру L равна взятой с обратным знаком производной по времени потока магнитной индукции \mathbf{B} через любую поверхность, опирающуюся на этот контур.

Заметим, что поток вектора \mathbf{B} через S называется *магнитным потоком* и обозначается

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} ds \quad [\text{Вб}]. \quad (1.8)$$

Далее заметим, что циркуляция \mathbf{E} по L , обозначаемая

$$\mathcal{E} = \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} \quad [\text{В}], \quad (1.9)$$

измеряется в Вольтах, так как \mathbf{E} имеет размерность $[\text{В/м}]$.

Теперь второе уравнение максвелла можно переписать в виде

$$\mathcal{E} = -\partial\Phi/\partial t, \quad (1.10)$$

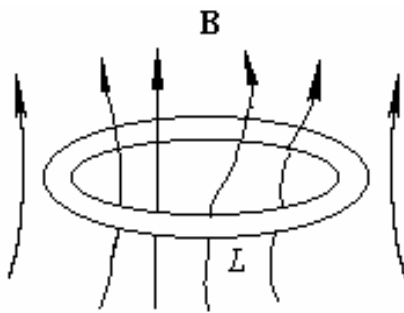


Рис. 1.3

что внешне совпадает с законом электромагнитной индукции Фарадея. Это не случайно – в тех условиях, в которых может быть применен закон электромагнитной индукции Фарадея, второе уравнение Максвелла действительно в него переходит.

Например, если взять проволочный контур в качестве L (рис. 1.3) и вычислить скорость изменения магнитного потока, проходящего через какую-либо поверхность S , ограниченную этим контуром, то найденная величина, взятая с обратным знаком, по закону Фарадея должна быть равна э.д.с., наводимой в контуре. Эта э.д.с. и равна \mathcal{E} в формуле (1.10).

Понятно, что в случае произвольного (мысленно очерченного в пространстве) контура L закон Фарадея не может быть применен хотя бы потому, что такая ситуация выходит далеко за пределы тех опытных фактов, на основе которых он был установлен.

Закон электромагнетизма, выражаемый вторым уравнением Максвелла, гораздо шире, поскольку пространственный объект здесь совершенно произволен. Однако этот закон мы вправе охарактеризовать как *обобщенный закон электромагнитной индукции*.

2.2. Ток и магнитное поле

Перейдем теперь к первому уравнению Максвелла, рассматривая одновременно его дифференциальную и интегральную форму.

Формальная связь равенств (1.5-1) и (1.6-1) теперь совершенно ясна, от (1.5-1) можно перейти к (1.6-1) точно так же, как мы сделали до этого при рассмотрении второго уравнения Максвелла.

Пусть электромагнитный процесс неизменен во времени (стационарен), т.е. $\partial/\partial t = 0$. Тогда:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} \quad \text{и} \quad \oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \mathbf{I}, \quad (1.11)$$

где

$$\mathbf{I} = \int_S \mathbf{j} ds \quad (1.12)$$

есть полный ток проводимости, проходящий через S . Ввиду наложенного выше условия стационарности, этот ток постоянен.

Равенства (1.11) выражают связь магнитного поля и постоянного тока. Нельзя представить себе ток без магнитного поля, так как при $\mathbf{j} \neq 0$ обязательно $\operatorname{rot} \mathbf{H} \neq 0 \Rightarrow \mathbf{H} \neq 0$.

Если же поле изменяется во времени ($\partial/\partial t \neq 0$), но ток отсутствует ($\mathbf{j} = 0$), то из формул (1.5-1), (1.6-1) следует

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} ds. \quad (1.13)$$

Сравнивая формулы (1.13) и (1.11), видим, что векторная функция $\partial \mathbf{D}/\partial t$ (скорость изменения электрической индукции) играет здесь ту же роль, что и плотность тока проводимости \mathbf{j} в стационарном случае. То есть существование изменений во времени индукции \mathbf{D} ($\partial \mathbf{D}/\partial t \neq 0$) влечет за собой наличие магнитного поля ($\mathbf{H} \neq 0$).

Величина $\partial \mathbf{D}/\partial t$ называется *плотностью тока смещения*, а интеграл

$$I^{\text{см}} = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} ds = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} ds \quad (1.14)$$

выражает *ток смещения*.

Обобщенным током и его плотностью мы будем называть величины

$$I + I^{\text{см}} \quad \text{и} \quad \mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t,$$

входящие справа в первое уравнение Максвелла.

Итак, согласно первому уравнению Максвелла в интегральной форме циркуляция напряженности магнитного поля по произвольному контуру L равна полному обобщенному току, проходящему через любую поверхность S , которая опирается на этот контур.

Из первого уравнения Максвелла в интегральной форме видно, что в отсутствие магнитного поля обобщенный ток равен нулю, а появление тока обязательно порождает магнитное поле. Роли тока проводимости и тока смещения при этом одинаковы.

Ток смещения – одна из характеристик переменного электромагнитного поля. Физический смысл этого понятия будет выясняться постепенно по мере изучения дальнейшего материала.

Применим операцию div к левой и правой частям первого уравнения Максвелла в дифференциальной форме и учтем при этом, что $\text{div rot } \mathbf{F} = 0$ (формула векторного анализа). Получим:

$$\text{div}(\mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t) = 0. \quad (1.15)$$

Рассмотрим произвольный объем V , границей которого является замкнутая поверхность S . Используем теорему Остроградского-Гаусса (интегральные формулы векторного анализа):

$$\int_V \text{div } \mathbf{F} dv = \oint_S \mathbf{F} ds.$$

Получим из (1.15) следующий результат:

$$\oint_S \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) ds = 0. \quad (1.16)$$

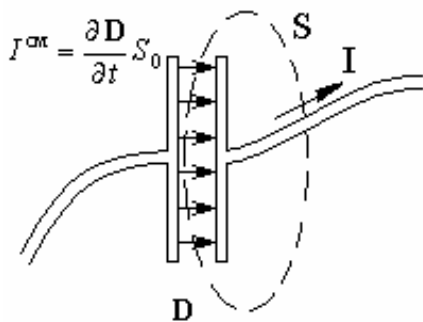


Рис. 1.4

Равенства (1.15) и (1.16) выражают важное свойство обобщенного тока:

- 1) векторные линии плотности обобщенного тока непрерывны (не имеют начала и конца);
- 2) полный обобщенный ток, выходящий через любую замкнутую поверхность, равен нулю.

Поясним это на примере конденсатора в цепи переменного тока (рис. 1.4). Замкнутая поверхность S может проходить между пластинами конденсатора, при этом она неизбежно пересекает провод.

Полный обобщенный ток $I + I^{\text{см}}$ через S в силу (1.16) равен нулю. Это означает, что в каждый данный момент ток смещения, сосредоточенный главным образом внутри конденсатора, равен по абсолютной величине и

противоположен по направлению току проводимости в цепи (выходящий из S ток положителен, входящий – отрицателен).

3. Уравнения Максвелла (вторая пара уравнений)

Третье и четвертое уравнения Максвелла определяют расхождение электрической и магнитной индукции и имеют следующий вид:

а) в дифференциальной форме:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0; \end{aligned} \quad (1.17)$$

б) в интегральной форме (их интегральные аналоги получаются в результате применения теоремы Остроградского-Гаусса):

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{D} ds &= q, \\ \oint_S \mathbf{B} ds &= 0, \end{aligned} \quad (1.18)$$

где $q = \int_V \rho dv$ – полный заряд в области V , ограниченной поверхностью S . В частности, в области V может содержаться несколько отдельных заряженных областей, например точечных зарядов разных знаков.

Рассмотрим физический смысл этих уравнений. Согласно третьему уравнению расхождение (дивергенция) вектора электрической индукции равно объемной плотности заряда ρ . По смыслу понятия div это означает, что векторные линии \mathbf{D} могут начинаться и кончаться только в тех точках пространства, где имеются заряды, т.е. $\rho \neq 0$. Если же во всех точках некоторой области V $\rho = 0$, то векторные линии \mathbf{D} либо пронизывают ее насквозь, либо являются замкнутыми (рис. 1.5). Поскольку при $\rho > 0$ расхождение \mathbf{D} положительно, а при $\rho < 0$ – отрицательно, то «источниками» векторных линий \mathbf{D} служат положительные заряды, а «стоками» – отрицательные заряды (рис. 1.6).

Интегральная форма третьего уравнения Максвелла (1.18-1) называется *теоремой Гаусса*. Смысл ее состоит в том, что полный заряд в объеме V определяется потоком электрической индукции через его замкнутую границу S . При этом не имеет значения, как распределен заряд.

Если интеграл в левой части уравнения равен нулю, то это еще не означает отсутствие заряда в объеме: может быть

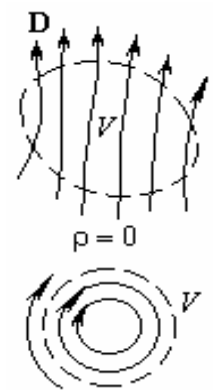


Рис. 1.5

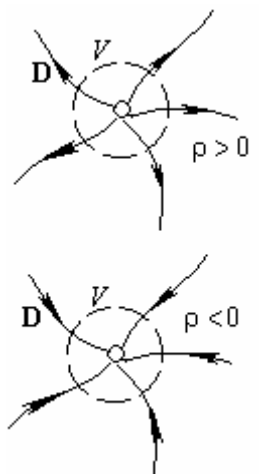


Рис. 1.6

ситуация, когда положительные и отрицательные заряды уравниваются друг друга (рис. 1.7).

Из третьего уравнения Максвелла в интегральной форме можно сделать и следующее заключение относительно размерности: ранее мы отмечали, что

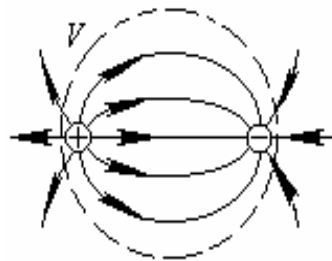


Рис. 1.7

\mathbf{D} измеряется в $[\text{Кл}/\text{м}^2]$, заряд же q , как мы знаем, измеряется в $[\text{Кл}]$, т.е. формулой (1.18-1) мы подтверждаем эту размерность.

Рассмотрим теперь четвертое уравнение Максвелла (1.17-2) – в дифференциальной форме. Равенство нулю расхождения магнитной индукции означает, что векторные линии \mathbf{B} (магнитные силовые линии) нигде не начинаются и не кончаются: они или замкнуты, или уходят в бесконечность (рис. 1.8).

Уравнение в интегральной форме (1.18-2) говорит о том, что поток магнитной индукции (магнитный поток) через любую замкнутую поверхность всегда равен нулю.

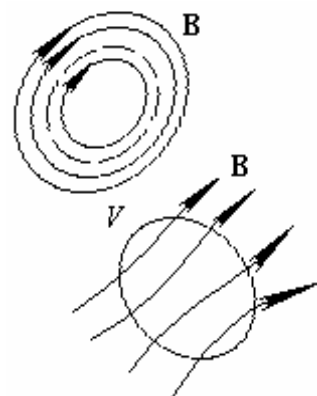


Рис. 1.8

Заметим, что четвертые уравнения Максвелла формально аналогичны рассматривавшимся ранее уравнениям (1.15), (1.16) для обобщенного тока.

Непрерывность магнитных силовых линий соответствует отсутствию в природе свободных магнитных зарядов. Уравнения (1.17-2), (1.18-2) позволяют формально записать:

$$\rho^m = 0, \quad q^m = 0,$$

где ρ^m , q^m относятся к гипотетическим магнитным зарядам.

3.1. Уравнение непрерывности и ток смещения

Согласно представлениям, принятым современной физикой, заряд не может исчезнуть или возникнуть «из ничего». Поэтому убывание заряда q в некоторой области V можно объяснить только его вытеканием наружу, а увеличение – только притоком извне.

Математически закон сохранения заряда выражается *уравнением непрерывности*.

Нам уже известно, как следствие формулы (1.1) для объемной плотности заряда, что заряд, заключенный внутри некоторого объема V , выражается интегралом

$$q = \int_V \rho dv. \quad (1.19)$$

Если заряд внутри области V изменяется, то происходит движение зарядов через поверхность S , ограничивающую этот объем. В этом случае возникает ток проводимости через поверхность S :

$$I = -\frac{dq}{dt}. \quad (1.20)$$

Это уравнение выражает закон сохранения заряда.

Используем интегральные представления для заряда и тока. Тогда формула (1.20) примет вид:

$$\oint_S \mathbf{j} ds = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dv.$$

Получим теперь дифференциальную формулировку закона сохранения заряда. Для этого к левой части применим теорему Остроградского-Гаусса, а в правой части внесем дифференциальный оператор под знак интеграла:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{j} dv = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv \quad \text{или} \quad \int_V \left(\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dv = 0,$$

причем область V – произвольна, а это означает, что подынтегральное выражение равно нулю:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (1.21)$$

Это и есть *уравнение непрерывности*, которое является дифференциальной формулировкой закона сохранения заряда.

Рассмотрим случай стационарных токов (постоянных).

В этом случае объемная плотность зарядов ρ в каждой точке постоянна и из (1.21) следует

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (1.22)$$

Уравнение (1.22) показывает, что линии плотности постоянного тока не имеют ни начала, ни конца, т.е. либо уходят в бесконечность, либо являются замкнутыми.

В качестве примера рассмотрим электрическую цепь, содержащую конденсатор, обкладки которого разделены вакуумом. Известно, что по такой цепи постоянный ток не течет. Это является следствием того, что в пространстве между обкладками конденсатора заряды двигаться не могут, поэтому линии плотности тока проводимости \mathbf{j} между обкладками не могут быть продолжены и, следовательно, уравнение (1.22) не удовлетворяется и постоянного тока между обкладками нет.

По-другому обстоит дело в случае переменных токов. Здесь

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0.$$

Следовательно, линии вектора \mathbf{j} начинаются и заканчиваются в тех точках, где имеются заряды. При этом наличие в цепи конденсатора не является препятствием для протекания электрического тока. Однако и в этом случае заряды между обкладками конденсатора двигаться не могут. Поэтому необходимо допустить, что между обкладками происходит некоторый процесс, эквивалентный наличию тока проводимости.

Говорят, что между обкладками существует ток смещения, замыкающий ток проводимости.

Учитывая, что $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$, получим вновь уравнение (1.15):

$$\operatorname{div} \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0,$$

которое говорит о том, что линии плотности обобщенного тока всегда замкнуты.

Плотность тока смещения между обкладками конденсатора равна плотности тока проводимости (с обратным знаком), который протекал бы между обкладками, если бы пространство между ними было заполнено проводником.

Из формул видно, что по своей природе плотность тока смещения не имеет ничего общего с плотностью тока проводимости. Плотность тока смещения $\mathbf{j}^{\text{см}}$ есть величина, пропорциональная скорости изменения электрического поля в данной точке. Однако она не случайно называется током: дело в том, что ток смещения сопровождается появлением точно такого же магнитного поля, какое возникает при наличии равного ему тока проводимости.

Таким образом, не только изменение магнитного поля вызывает появление электрического поля (как мы видели из первого уравнения Максвелла), но и, наоборот, изменение электрического поля всегда сопровождается возникновением магнитного поля.

3.2. Соотношение первой и второй пары уравнений Максвелла

Первая и вторая пары уравнений Максвелла не являются полностью независимыми. Возьмем, например, второе уравнение Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

и применим к нему операцию div , а затем заменим местами операторы div и $\partial/\partial t$ в правой части. Получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{B} = \text{const},$$

т.е. функция $\operatorname{div} \mathbf{B}$ не зависит от времени.

Как сказал в середине XX века Дж.А. Стрэттон: «Если поле в прошлом отсутствовало, то эта постоянная должна быть равна нулю. А так как разумно предположить, что первоначальное возникновение поля произошло не бесконечно давно, то $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ ».

Таким образом осуществляется переход от второго уравнения Максвелла к четвертому уравнению.

Однако, несмотря на очевидную связь второго и четвертого уравнений Максвелла, все же существуют веские основания писать их отдельно. Дело в том, что при этом:

- а) приведенное выше рассуждение оказывается математически формализованным, а математическая запись всегда лаконичнее словесной;
- б) формализация физических положений необходима при решении математических задач теории электромагнетизма.

Аналогичным путем можно получить третье уравнение Максвелла из первого уравнения, однако по вышеуказанным причинам эти уравнения также принято рассматривать отдельно, как самостоятельные положения теории, и включить их в систему уравнений Максвелла к рассмотрению которой мы теперь и переходим.

4. Система уравнений Максвелла

Запишем всю совокупность математических положений, рассматриваемых, как полная система уравнений теории электромагнетизма.

Это – четыре уравнения Максвелла в частных производных:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}, & \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \quad (1.23)$$

и алгебраические соотношения:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (1.24)$$

Совокупность (1.23), (1.24) называется *системой уравнений Максвелла*.

Равенства (1.24), устанавливающие связь индукций \mathbf{D} , \mathbf{B} и плотности тока \mathbf{j} с полями \mathbf{E} и \mathbf{H} , иногда называют *материальными уравнениями*, так как входящие в них ε , μ (диэлектрическая и магнитная проницаемости) и σ (удельная проводимость) характеризуют свойства сред (веществ, материалов), в которых существуют поля.

Свойства сред мы обсудим позже, а пока отметим, что, в отличие от уравнений (1.23), равенства (1.24) не являются наиболее общими (универсальными) положениями теории, это простейшие, но в то же время широко используемые, соотношения.

Заменяя уравнения (1.23) их интегральными аналогами, получаем систему уравнений Максвелла в интегральной форме, которая рассматривается вместе с материальными уравнениями (1.24):

$$\begin{aligned} \oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} &= \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} ds + I, & \oint_S \mathbf{D} ds &= q, \\ \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} &= -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} ds, & \oint_S \mathbf{B} ds &= 0 \end{aligned} \quad (1.25)$$

Система уравнений Максвелла (1.23), (1.24) или (1.25), (1.24) выражает общие принципы теории, достаточные для описания различных частных электромагнитных процессов.

Существуют среды, для которых уравнения (1.24) должны быть заменены более сложными материальными уравнениями, которые вместе с уравнениями (1.23) или (1.25) вновь образуют полную систему уравнений Максвелла.

Отметим следующий очевидный факт. Сама по себе система уравнений Максвелла не имеет определенных решений, т.е. из нее непосредственно нельзя получить совокупность векторных функций \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{D} , \mathbf{B} , \mathbf{j} как функций $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$. Определенное решение существует только при наложении некоторых дополнительных условий, характеризующих тот или иной реальный объект. Это так называемые *граничные условия* (конкретной) задачи.

Задача, таким образом, считается полностью сформулированной, и ее можно решить математически, когда уравнения Максвелла дополнены некоторыми граничными условиями. В этом случае решение, описывающее исследуемый электромагнитный процесс, существует и может быть получено.

Вопрос постановки граничных условий мы рассмотрим в следующей главе, а пока сделаем следующее замечание.

4.1. Понятие о прямой и обратной задачах электродинамики

Существенная часть задач электродинамики состоит в изучении движения зарядов в поле электромагнитных сил.

Если заряд можно считать точечным, то на него в электромагнитном поле действует сила Лоренца:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}]), \quad (1.26)$$

где $[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$ означает векторное произведение, \mathbf{v} – скорость движения заряда.

В случае неподвижного заряда ($\mathbf{v}=0$) сила зависит только от напряженности электрического поля \mathbf{E} . Случай $\mathbf{v}=0$ фактически означает отсутствие тока (направленного движения заряженных частиц), отсюда, как мы знаем, и следует, что магнитное поле отсутствует (уравнения Максвелла) и на заряд действует сила

$$\mathbf{F}_1 = q\mathbf{E}. \quad (1.26a)$$

В принципе, можно представить себе мысленный эксперимент по «зондированию» области пространства некоторой частицей с зарядом q с целью определения напряженности поля \mathbf{E} (*обратная задача*).

Равенство (1.26a) обычно рассматривается в качестве определения напряженности электрического поля.

Если же заряд движется ($\mathbf{v} \neq 0$), то возникает магнитное поле и появляется вторая составляющая силы:

$$\mathbf{F}_2 = q[\mathbf{v}, \mathbf{B}], \quad (1.26b)$$

которая иногда также называется лоренцевой силой. С появлением этой составляющей связывают определение вектора магнитной индукции \mathbf{B} [Вб/м²]. Пробным телом здесь может служить не движущийся заряд (что осуществить весьма сложно), а неподвижный виток с током.

Отметим следующее. Чтобы решить *прямую задачу* вычисления параметров движения заряда в поле электромагнитных сил, используется уравнение движения Ньютона

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}, \quad (1.27)$$

где сила определяется из выражения (1.26), а чтобы найти эту силу, необходимо вычислить поля \mathbf{E} и \mathbf{B} , используя систему уравнений Максвелла, материальные уравнения, описывающие среду, в которой рассматривается задача, и граничные условия конкретной задачи.

Глава 2

СВОЙСТВА СРЕД

1. Виды сред и их свойства. Поляризация и намагничивание

Внутренние электромагнитные процессы в веществе обычно настолько в среднем уравновешены, что сами по себе не создают макроскопических полей. Исключение составляют лишь некоторые среды – например, ферромагнетики (постоянные магниты), действие которых обусловлено как раз внутренними «самопроизвольными» процессами.

Под действием же внешнего электромагнитного поля на заряженные элементы материи (например, на электроны и ионы в плазме) компенсация внутренних полей уменьшается, например, в электрическом поле вследствие переориентации атомов, молекул и заряженных частиц.

В результате появляется такое внутреннее поле, которое, налагаясь на внешнее, заметно изменяет его. Этот процесс называется *поляризацией среды*.

Аналогичный процесс во внешнем магнитном поле называется *намагничиванием*.

Не затрагивая внутренние, «микроскопические» процессы в средах, ограничимся чисто феноменологическим их описанием на макроуровне, имея в виду выяснение физического содержания материальных уравнений в системе уравнений Максвелла.

Итак, пусть напряженность электрического поля есть \mathbf{E} , а напряженность магнитного поля – \mathbf{H} .

Тогда для электрической и магнитной индукции в вакууме будем иметь:

$$\mathbf{D}_0 = \epsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}$$

В материальных же средах, вместо \mathbf{D}_0 и \mathbf{B}_0 будем иметь \mathbf{D} и \mathbf{B} и закономерный интерес вызывает рассмотрение разностей:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{D} - \mathbf{D}_0, \\ \mathbf{M} &= \mathbf{B} - \mathbf{B}_0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

первая из которых называется *поляризованностью* (электрической поляризацией), а вторая – *намагниченностью* (магнитной поляризацией).

Традиционно встречается другое определение вектора намагниченности:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{H},$$

но мы в целях единообразия будем рассматривать формулу (2.1).

Процессы поляризации и намагничивания обычно выступают как независимые, поэтому можно записать:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{P}(\mathbf{E}), & \mathbf{D} &= \mathbf{D}(\mathbf{E}), \\ \mathbf{M} &= \mathbf{M}(\mathbf{H}), & \mathbf{B} &= \mathbf{B}(\mathbf{H}). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Простейшая интерпретация этих формул состоит в том, что, например, поляризация $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ полностью определяется напряженностью поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ в той же точке пространства $Y(\mathbf{r})$ и в тот же момент времени t . То же самое можно сказать и о намагниченности \mathbf{M} .

Иными словами, процессы поляризации и намагничивания считаются *локальными* и *безинерционными*: в каждой точке они не зависят от состояния окружающей среды и не зависят от «предыстории» состояния. Это является некоторой идеализацией, но пока мы будем придерживаться этой точки зрения, полагая также, что:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{E} = 0 \quad \text{и} \\ \mathbf{M} &= 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{H} = 0, \end{aligned}$$

т.е. что самопроизвольные поляризация и намагниченность отсутствуют.

В большинстве сред векторы \mathbf{P} , \mathbf{E} и \mathbf{D} , а также \mathbf{M} , \mathbf{H} и \mathbf{B} коллинеарны, поэтому удобно записать:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \chi^{\text{э}} \varepsilon_0 \mathbf{E}, \\ \mathbf{M} &= \chi^{\text{м}} \mu_0 \mathbf{H}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Безразмерные коэффициенты $\chi^{\text{э}}$ и $\chi^{\text{м}}$ в (2.3) называются электрической и магнитной восприимчивостью среды. Они выражают «меру отклика» среды на внешние электрическое и магнитное поле.

Используя равенства (2.1), получим:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H}, \quad (2.4)$$

где

$$\varepsilon_r = 1 + \chi^{\text{э}}, \quad \mu_r = 1 + \chi^{\text{м}}. \quad (2.5)$$

Это те самые материальные уравнения, которые были нами включены в полную систему уравнений Максвелла. Здесь ϵ_r, μ_r – относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости, а полные коэффициенты $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$, $\mu = \mu_r \mu_0$ – абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости.

Рассмотрим теперь основные типы сред. Характер среды определяется характером входящих в уравнения (2.4) коэффициентов ϵ_r, μ_r . Очевидно, что в случае *однородной* среды, ϵ и μ не зависят от координат, а в случае *неоднородной* среды – $\epsilon = \epsilon(\mathbf{r})$, $\mu = \mu(\mathbf{r})$.

Если ϵ и μ не зависят от полей \mathbf{E} и \mathbf{H} , соответственно, то среда является *линейной* (в смысле процессов поляризации и намагничивания) и соотношения (2.4) – линейны. Следует иметь в виду, что идеально линейных сред практически не существует, однако нелинейность начинает значимо проявляться только при больших напряженностях полей (электромагнитные поля, создаваемые лазерами; электромагнитные поля, создаваемые мощной радиоволной в ионосфере и т.п.). При довольно слабых полях нелинейность, тем не менее, свойственна ферромагнетикам и некоторым другим средам. Вообще же, конечно, уравнения (2.4) при независимых от полей ϵ и μ следует рассматривать как *линеаризацию* более общих нелинейных уравнений.

Поясним это на следующем примере.

Пусть, например, зависимость $\mathbf{D}=\mathbf{D}(\mathbf{E})$ сводится к скалярной $D=D(E)$. Тогда, при отсутствии самопроизвольной поляризации ($D(0) = 0$), разлагая эту функцию в ряд Тейлора по степеням E , получим:

$$D(E) = \epsilon_0 \epsilon_r(E) E = \epsilon(E) E,$$

где

$$\epsilon(E) = \epsilon_L + \epsilon_1 E + \epsilon_2 E^2 + \dots + \epsilon_n E^n + \dots$$

$$\epsilon_L = \frac{dD}{dE}(0), \quad \epsilon_n = \frac{1}{(n+1)!} \frac{d^{n+1}D}{dE^{n+1}}(0).$$

При этом, при достаточно малых абсолютных значениях E , ϵ может считаться не зависящей от E : $\epsilon(E) = \epsilon_L$.

Векторы \mathbf{P} , \mathbf{E} и \mathbf{D} , а также \mathbf{M} , \mathbf{H} и \mathbf{B} , обычно не только коллинеарны, но и параллельны ($\epsilon, \mu > 0$).

По своему смыслу формулы (2.4) безразличны к направлению поля. Такие среды называются *изотропными*. Однако часто приходится рассматривать также *анизотропные* среды, свойства которых могут быть различны в разных направлениях.

Анизотропию не надо путать с неоднородностью, анизотропная среда, как и изотропная, может быть неоднородна и однородна, в последнем случае ее свой-

ства зависят от направления во всех точках одинаково.

Примеры:

- 1) анизотропия свойственна кристаллам;
- 2) в радиотехнике широко используются ферриты (как сердечники катушек индуктивности), которые анизотропны в СВЧ-поле;
- 3) анизотропной (под действием магнитного поля Земли) является ионосфера, что учитывается при анализе распространения радиоволн.

При анизотропии (в смысле электрической и магнитной поляризации (намагниченности) векторы \mathbf{P} , \mathbf{E} и \mathbf{D} и \mathbf{M} , \mathbf{H} и \mathbf{B} перестают быть коллинеарными. Материальные уравнения при анизотропии сокращают свой вид, однако ε и μ при этом надо понимать как *тензоры* (матрицы 3-го порядка), их в этом случае называют тензорами диэлектрической и магнитной проницаемостей.

Для некоторой декартовой системы координат они могут быть записаны в следующем виде:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Таким образом, свойства среды описываются наборами чисел: каждый тензор характеризуется девятью элементами, которые являются константами для однородной среды и функциями координат – для неоднородной. В большинстве практических случаев среди элементов тензоров ε_{ik} , μ_{ik} имеются нули.

Чтобы рассмотреть, как записываются материальные уравнения в анизотропных средах, возьмем одно из них и запишем его покомпонатно:

$$\begin{aligned} D_x &= \varepsilon_{xx}E_x + \varepsilon_{xy}E_y + \varepsilon_{xz}E_z, \\ D_y &= \varepsilon_{yx}E_x + \varepsilon_{yy}E_y + \varepsilon_{yz}E_z, \\ D_z &= \varepsilon_{zx}E_x + \varepsilon_{zy}E_y + \varepsilon_{zz}E_z. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Каждая компонента вектора \mathbf{D} может зависеть от всех трех компонент вектора \mathbf{E} , если в соответствующей строке тензора диэлектрической проницаемости нет нулей.

Тензорам проницаемостей отвечают тензоры восприимчивостей $\chi^{\text{э}}$ и $\chi^{\text{м}}$. Эти величины по-прежнему связаны формулами (2.5), только вместо “1” в них надо писать символ единичной матрицы 3-го порядка.

Данные об электрических и магнитных проницаемостях различных распространенных веществ можно без труда найти в справочной литературе.

Рассмотрим теперь еще одно материальное уравнение и связанное с ним понятие.

2. Электропроводность

В большинстве задач электродинамики плотность тока проводимости \mathbf{j} есть некоторая функция электрического поля \mathbf{E} :

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{E})$$

и эта зависимость характеризует среду в смысле ее электропроводности. Простейшая, но весьма распространенная, форма такой зависимости выражается уравнением:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (2.8)$$

которое было включено нами в систему уравнений Максвелла.

Для сред, которые изотропны по электропроводности, удельная проводимость σ есть скалярный коэффициент (функция координат, если среда неоднородна).

Для анизотропных сред σ есть матрица:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

которая называется *тензором удельной проводимости* (σ_{ik}).

Покажем, что материальное уравнение (2.8) в случае изотропных сред, линейных по проводимости (σ не зависит от \mathbf{E}), есть форма записи *закона Ома*, приспособленная для локального описания процесса.

Выделим в среде некоторую малую цилиндрическую область, так чтобы вектор \mathbf{j} внутри нее можно было считать неизменным (рис. 2.1). Пусть l – длина цилиндра, S – площадь его основания, V – объем.

Проинтегрируем по всему объему V уравнение (2.8):

$$\int_V \mathbf{j} dV = \int_V \sigma \mathbf{E} dV,$$

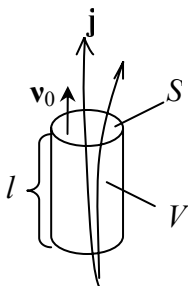


Рис. 2.1

левая часть: $\mathbf{j}V = \mathbf{v}_0 j S l = \mathbf{v}_0 I l$, правая часть: $\sigma \mathbf{E} l S = \sigma \mathbf{v}_0 E l S =$

$\sigma \mathbf{v}_0 US$, где U – в терминологии электротехники – падение напряжения на участке l . Имеем:

$$\mathbf{v}_0 I l = \sigma \mathbf{v}_0 US \Rightarrow I = UR, \quad (2.10)$$

а это есть формулировка *закона Ома* для участка цепи, где $R = l / \sigma S$ – электрическое сопротивление выделенного цилиндра (это мог быть и участок провод.

Поскольку $[R] = \text{Ом}$, то $[\sigma] = 1/\text{Ом}\cdot\text{м}$, соответственно единица называется *сименс на метр* (См/м).

Рассмотрим теперь, как связаны ток и скорость движения зарядов.

Пусть имеется некоторое распределение зарядов, перемещающихся, в среднем, со скоростью \mathbf{V} , при этом существует ток, характеризуемый в каждой точке пространства плотностью \mathbf{j} .

Обратимся теперь к рис. 2.2.

Ток, проходящий через основание цилиндра, есть

$$I = \mathbf{j} \mathbf{v}_0 S = jS.$$

С другой стороны, по определению,

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt},$$

где Δq – заряд, проходящий через площадь S за время Δt .

Пусть в момент t в объеме $V = Sl$ содержится заряд q . По прошествии Δt он займет область, сдвинутую на Δl в направлении \mathbf{j} , причем заряд Δq , прошедший через основание цилиндра содержится в объеме $\Delta V = S\Delta l$.

Учитывая, что при $\Delta t \rightarrow 0$ $\Delta q / \Delta V \rightarrow \rho$ и $\Delta l / \Delta t \rightarrow v$, запишем:

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} S \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} = S\rho v,$$

откуда следует, что $j = \rho v$ или в векторной форме:

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}. \quad (2.11)$$

Полученный результат очень прост по форме (к аналогичному соотношению приводит анализ движения жидкости), однако введение скорости \mathbf{v} требует добавления к уравнениям Максвелла дополнительных уравнений движения заряженных частиц в электромагнитном поле.

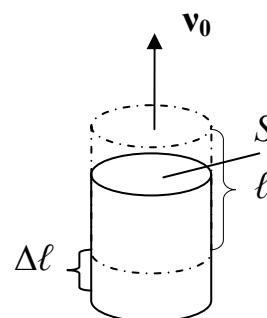


Рис. 2.2

В зависимости от степени электропроводности, вещества делят на *проводники* и *диэлектрики* (изоляторы). Удельные проводимости проводников и диэлектриков (их можно легко найти в справочной литературе) различаются на много порядков, поэтому их поведение в электромагнитных полях существенно различно.

В ряде случаев, при решении электродинамических задач, реальные проводники и диэлектрики заменяют идеальными:

- а) идеальным проводником с *неограниченной проводимостью* ($\sigma \rightarrow 0$);
- б) идеальным диэлектриком, *лишенным проводимости* ($\sigma = 0$).

Имеются, однако, среды, занимающие по проводимости промежуточное положение. Такие вещества в переменных электромагнитных полях, в зависимости от условий, проявляют свойства диэлектриков или проводников. Чтобы найти меру оценки свойств промежуточных сред, надо сначала выяснить сущность качественного различия между диэлектриками и проводниками.

Сравним идеальный диэлектрик с идеальным проводником. В первой среде может существовать лишь *ток смещения*, так как $\sigma = 0$. Во второй среде – наоборот, только *ток проводимости*, так как $\sigma \rightarrow 0$.

Плотность обобщенного тока:

$$\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \sigma \mathbf{E} + \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Поэтому реальная среда признается близкой к идеальному диэлектрику, если в ней ток смещения значительно преобладает над током проводимости, и к идеальному проводнику – в обратном случае. По этому признаку и различают в электродинамике диэлектрики и проводники.

Однако, кроме отмеченного, соотношение токов проводимости и смещения зависит не только от свойств среды σ и ε , но и от скорости изменения электрического поля $\partial \mathbf{E} / \partial t$. В радиотехнике особый интерес представляют поля, гармонические во времени, и для них нетрудно получить простой критерий принадлежности среды к группе проводников или диэлектриков.

Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}_m(\mathbf{r}) \cos[\omega t + \varphi(\mathbf{r})]$, ω – круговая частота колебаний. Вычислим в произвольной точке $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ плотности токов проводимости и смещения:

$$j = \sigma E = \sigma E_m \cos(\omega t + \varphi),$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r E_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Составим отношение их амплитуд:

$$\sigma / \omega \varepsilon_0 \varepsilon_r. \tag{2.12}$$

Это и есть мера оценки свойств среды при данной частоте.

При $\sigma/\omega\varepsilon_0\varepsilon_r \gg 1$ в формуле (2.12) среда характеризуется как проводник, при $\sigma/\omega\varepsilon_0\varepsilon_r \ll 1$ – как диэлектрик. Поэтому, с точки зрения электродинамики, деление сред на проводники и диэлектрики относительно, так как вопрос о принадлежности среды к тому или иному классу решается в зависимости от свойств поля (при гармонических колебаниях – от частоты). В том широком диапазоне частот, который используется в современной радиотехнике, свойства сред меняются весьма значительно. Вообще говоря, ε и σ тоже нельзя считать независимыми от частоты поля. Однако вплоть до очень высоких частот, когда колебания частиц материи еще далеки от своих резонансов, можно считать ε и σ независимыми от ω .

Зависимость свойств (степени «проводимости») различных природных сред можно проиллюстрировать графиком (рис. 2.3).

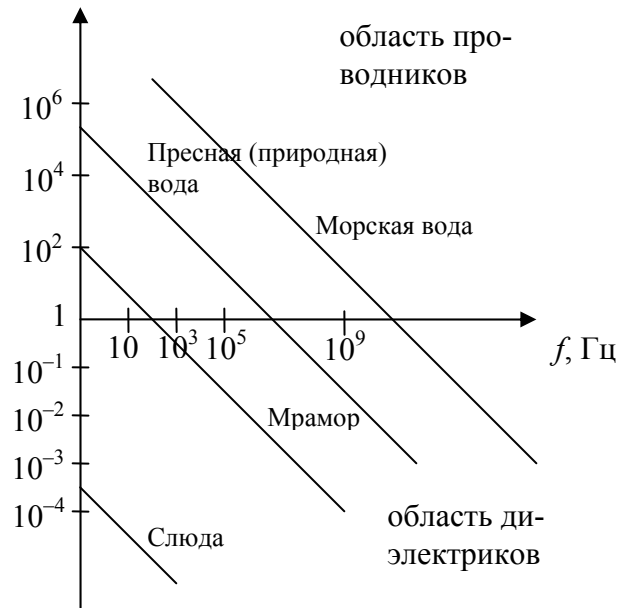


Рис. 2.3

Глава 3

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Как уже подчеркивалось, для решения конкретных задач уравнений Максвелла явно не достаточно. Необходимо еще:

а) иметь представление о свойствах среды, в которых решается электродинамическая задача и

б) поставить некоторые дополнительные условия (начальные и граничные), чтобы из общего решения получить частное.

Следовательно, необходимо поставить задачу изучения электромагнитных полей вблизи границ, которыми будут являться поверхности физических тел, разделяющие среды с разными электромагнитными свойствами. То есть мы будем изучать поля вблизи поверхностей, где такие параметры сред, как ϵ , μ и σ испытывают скачок. Причем будем считать этот скачок идеальным, т.е. рассматривать ϵ , μ и σ как разрывные функции нормали к границе.

Можно было бы, конечно, учитывать тонкий переходный слой, в котором параметры среды меняются плавно-непрерывно, однако такой подход в рамках макроскопической электродинамики был бы непоследовательным.

Дифференциальные уравнения Максвелла применять в точках границы затруднительно, поскольку производные на границе будут терпеть разрыв и потребуется вводить некоторые обобщения дифференциальных операторов rot и div для учета разрывов некоторых компонент.

Интегральные аналоги уравнений Максвелла по своему математическому характеру таковы, что они могут быть применены к областям V и S , содержащим внутри себя границы, на которых векторы поля терпят разрыв. Поэтому мы будем использовать уравнения Максвелла в интегральной форме для изучения полей на границах раздела сред.

Рассмотрим по отдельности нормальные и касательные к поверхности раздела сред компоненты поля.

1. Нормальные компоненты векторов поля

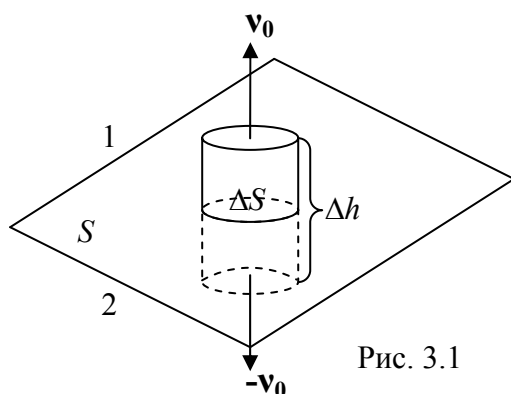


Рис. 3.1

Пусть поверхность S разбивает среды 1 и 2 с разными электрическими и магнитными свойствами (рис. 3.1). На S выберем достаточно малый элемент ΔS и построим на нем элементарный цилиндр высотой Δh .

Термин «достаточно малый элемент ΔS » понимается в том смысле, что ΔS можно считать участком плоскости, а прилежащее к нему поле в средах 1 и 2 не изменяющимся в пределах ΔS .

А). Чтобы получить характер вектора электрической индукции \mathbf{D} на границе S , применим к построенному цилиндру *теорему Гаусса*:

$$\oint_S \mathbf{D} ds = q. \quad (3.1)$$

Ввиду однородности поля (элементарный цилиндр!) поток вектора \mathbf{D} через верхнее и нижнее основания цилиндра находятся простым умножением на ΔS скалярного произведения \mathbf{D} на \mathbf{v}_0 (или $-\mathbf{v}_0$).

Поток через боковую поверхность цилиндра обозначается $\Phi_{бок}^z$. Тогда из (3.1) получим:

$$\mathbf{D}_1 \mathbf{v}_0 \Delta S - \mathbf{D}_2 \mathbf{v}_0 \Delta S + \Phi_{бок}^z = \Delta q,$$

где Δq – заряд внутри цилиндра.

Будем теперь уменьшать Δh так, чтобы в пределе $\Delta h \rightarrow 0$ верхнее и нижнее основания цилиндра совпали с площадью ΔS . При этом, площадь боковой поверхности и объем цилиндра будут стремиться к нулю. Предполагая, что

$$\Delta q = \Delta q_V + \Delta q_S$$

(заряд состоит из заряда в объеме V и заряда на поверхности S), получим, что только $\Delta q_V \rightarrow 0$ при $\Delta h \rightarrow 0$. Таким образом, в пределе будем иметь:

$$(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \mathbf{v}_0 \Delta S = \Delta q_S. \quad (3.2)$$

Введем понятие *плотности поверхностного заряда* ξ :

$$\xi = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q_S}{\Delta S} \quad (3.3)$$

[сравним с объемной плотностью заряда ρ – формула (1.1)].

Учитывая, что поле в граничной области ΔS однородно, а значит можно записать $\Delta q_S = \xi \Delta S$, получим из (3.2) и (3.3):

$$(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \mathbf{v}_0 = \xi. \quad (3.4)$$

Из полученной формулы следует важный вывод. Поскольку

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D}_1 \mathbf{v}_0 &= D_{v1} \\ \mathbf{D}_2 \mathbf{v}_0 &= D_{v2} \end{aligned} \right\}$$

есть проекции вектора \mathbf{D} на направление \mathbf{v}_0 при подходе к границе S сверху и снизу, то из (3.4) видно, что нормальная компонента \mathbf{D} терпит на границе S разрыв, величина скачка при этом равна ξ – плотности поверхностного заряда. В частности, если на поверхности раздела сред нет заряда ($\xi = 0$), то нормальная компонента \mathbf{D} непрерывна.

Если заменить в формуле (3.4)

$$\mathbf{D}_1 \rightarrow \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \mathbf{E}_1 = \varepsilon_1 \mathbf{E}_1,$$

$$\mathbf{D}_2 \rightarrow \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} \mathbf{E}_2 = \varepsilon_2 \mathbf{E}_2,$$

то можно переписать (3.4) относительно вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} .

Б). Перейдем теперь к рассмотрению характера вектора магнитной индукции \mathbf{B} .

Используя четвертое уравнение Максвелла в интегральной форме

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{s} = 0,$$

которое аналогично уравнению теоремы Гаусса, получим:

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{v}_0 \Delta S - \mathbf{B}_2 \mathbf{v}_0 \Delta S + \Phi_{бок}^M = 0,$$

где $\Phi_{бок}^M$ – поток магнитной индукции через боковую поверхность цилиндра. При $\Delta h \rightarrow 0$ получаем:

$$(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \mathbf{v}_0 = 0.$$

Отсюда следует, что $B_{v1} = \mathbf{B}_1 \mathbf{v}_0 = B_{v2} = \mathbf{B}_2 \mathbf{v}_0$, т.е. нормальные компоненты вектора \mathbf{B} при подходе к границе сверху и снизу равны, а значит, нормальная компонента вектора магнитной индукции всегда непрерывна.

И, наконец, отметим следующий факт. Вектор плотности обобщенного тока подчинен соотношению:

$$\oint_S \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{s} = 0,$$

что формально идентично четвертому уравнению Максвелла в интегральной форме. Следовательно, можно сразу записать равенство:

$$\left(\mathbf{j}_1 + \frac{\partial \mathbf{D}_1}{\partial t}\right) \mathbf{v}_0 - \left(\mathbf{j}_2 - \frac{\partial \mathbf{D}_2}{\partial t}\right) \mathbf{v}_0 = 0,$$

откуда следует, что нормальная компонента плотности обобщенного тока тоже всегда непрерывна на границе раздела сред. В частности, для стационарных процессов ($\partial/\partial t = 0$) отсюда следует непрерывность тока проводимости (нормальные компоненты): $j_{v1} = j_{v2}$.

2. Касательные (тангенциальные) компоненты векторов поля

Произведем следующее построение (рис. 3.2). Пересечем поверхность S поверхностью P , которая перпендикулярна малому элементу ΔS в окрестности рассматриваемой точки.

В плоскости P построим прямоугольный контур $L=ABCD$, пересекающий границу S в области ΔS :

$$AB=CD=\Delta l,$$

$$BC=AD=\Delta h$$

и $BC \parallel AD \parallel \mathbf{v}_0$ – нормальны к границе.

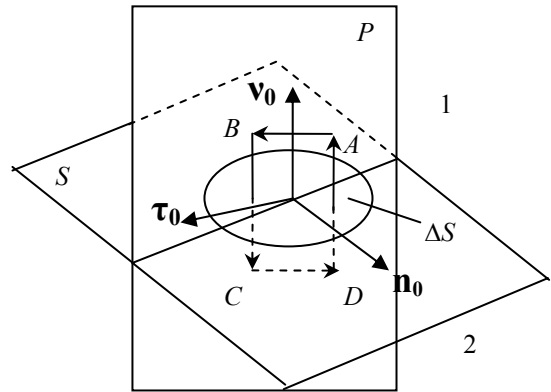


Рис. 3.2

Единичный вектор, касательный к линии пересечения плоскости P и S обозначим $\boldsymbol{\tau}_0$. Направление его выберем таким образом, чтобы выполнялось соотношение:

$$\boldsymbol{\tau}_0 = [\mathbf{n}_0, \mathbf{v}_0],$$

где \mathbf{n}_0 – единичный вектор нормали к плоскости P , направленный так, чтобы имела место правовинтовая система с направлением обхода контура L .

А). Чтобы исследовать поведение вектора \mathbf{E} , применим к контуру второе уравнение Максвелла в интегральной форме:

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} ds. \quad (3.5)$$

Ввиду малости контура L , получим простой по форме результат:

$$\mathbf{E}_1 \boldsymbol{\tau}_0 \Delta l - \mathbf{E}_2 \boldsymbol{\tau}_0 \Delta l + C_{бок}^3 = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \mathbf{n}_0 \Delta l \Delta h,$$

где в левой части циркуляция вектора \mathbf{E} по L разбита на три части: первые два члена соответствуют сторонам контура AB и CD , третий – вклад в циркуляцию \mathbf{E} боковых сторон контура. Будем неограниченно уменьшать Δh так, чтобы в пределе $\Delta h \rightarrow 0$ стороны AB и CD совпали на границе. При этом правая часть и $C_{бок}^3 \rightarrow 0$ и, следовательно:

$$(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \boldsymbol{\tau}_0 = 0. \quad (3.6)$$

Учтем, что ориентация вектора $\boldsymbol{\tau}_0$ относительно поля \mathbf{E} произвольна – можно как угодно вращать плоскость P вокруг нормали \mathbf{v}_0 к поверхности S . Поэтому можно считать, что $\boldsymbol{\tau}_0$ совпадает по направлению с проекцией \mathbf{E} на S . Тогда из (3.6) получим, что $E_{\tau 1} = \mathbf{E}_1 \boldsymbol{\tau}_0 = E_{\tau 2} = \mathbf{E}_2 \boldsymbol{\tau}_0$, т.е. касательная компонента E_{τ} вектора \mathbf{E} всегда непрерывна на границе раздела сред.

Равенству (3.6) можно придать иную форму. Учтем, что $\boldsymbol{\tau}_0 = [\mathbf{n}_0, \mathbf{v}_0]$, тогда из (3.6) имеем:

$$(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) [\mathbf{n}_0, \mathbf{v}_0] = 0 = [\mathbf{v}_0 (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)] \mathbf{n}_0 = 0.$$

Так как это равенство не должно зависеть от направления \mathbf{n}_0 (ориентации плоскости P), то

$$[\mathbf{v}_0, (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)] = 0. \quad (3.6a)$$

Удобство этого равенства состоит в том, что вектор \mathbf{v}_0 не зависит от направления поля \mathbf{E} и является вполне определенным для заданной поверхности раздела сред S .

Б). Рассматривая поведение вектора \mathbf{H} , можно сразу, на основании первого уравнения Максвелла в интегральной форме, записать:

$$\mathbf{H}_1 \boldsymbol{\tau}_0 \Delta l - \mathbf{H}_2 \boldsymbol{\tau}_0 \Delta l + C_{бок}^M = \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \mathbf{n}_0 \Delta l \Delta h, \quad (3.6b)$$

где $C_{бок}^M$ – вклад в циркуляцию вектора \mathbf{H} боковых сторон контура L . При $\Delta h \rightarrow 0$ $C_{бок}^M \rightarrow 0$.

Однако правая часть не будет стремиться к нулю, если на границе раздела существует поверхностный ток проводимости (поверхностный – в смысле

«не занимающий объема», это такая же макроскопическая абстракция, как и поверхностный заряд).

Поверхностный ток проводимости характеризуется плотностью:

$$\boldsymbol{\eta} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \mathbf{i}_0 \frac{\Delta I}{\Delta l}. \quad (3.7)$$

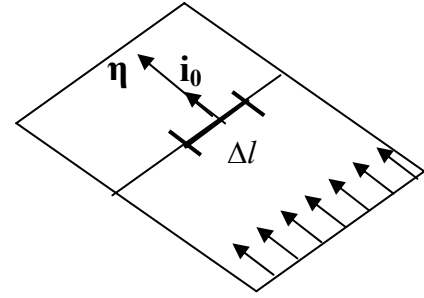


Рис. 3.3

Здесь \mathbf{i}_0 – единичный вектор, указывающий направление тока, Δl – элемент линии, пересекаемой током ΔI перпендикулярно.

Вернемся к изучению поведения вектора \mathbf{H} . В правой части равенства (3.6б) функция \mathbf{j} не является ограниченной при наличии поверхностного тока. Чтобы выяснить, что же происходит с правой частью, заметим, что по происхождению это интеграл вида:

$$I = \int_{\Delta S} j ds = \int_{\Delta l \Delta h} j ds = \mathbf{n}_0 \Delta l \int_{x_2}^{x_1} \mathbf{j} dx.$$

При стягивании контура L к отрезку Δl ($\Delta h \rightarrow 0$) этот интеграл не исчезает, так как через Δl проходит весь поверхностный ток (см. рис. 3.3). В этом случае:

$$\mathbf{n}_0 \Delta l \int_{x_2}^{x_1} \mathbf{j} dx \rightarrow \mathbf{n}_0 \boldsymbol{\eta} \Delta l$$

и, следовательно, из (3.6б) мы получаем:

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \boldsymbol{\tau}_0 = \mathbf{n}_0 \boldsymbol{\eta} \quad (3.8)$$

или, в более удобной форме,

$$[\mathbf{v}_0, (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)] = \boldsymbol{\eta}.$$

Данный результат показывает, что на границе раздела сред касательная компонента вектора \mathbf{H} (H_τ) терпит разрыв, векторы $(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)$ и $\boldsymbol{\eta}$ перпендикулярны. Касательная компонента H_τ , однако, остается непрерывной в случае отсутствия поверхностного тока ($H_{\tau 1} - H_{\tau 2}$). Подведем итоги и сформулируем граничные условия.

3. Граничные условия

Применение уравнений Максвелла в интегральной форме позволило установить поведение нормальных и тангенциальных компонент векторов электрического и магнитного полей на границе раздела сред.

Следуя традиции, будем называть эти соотношения граничными условиями. Основных граничных условий, таким образом, четыре:

- *нормальные компоненты:*

$$(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2)\mathbf{v}_0 = \xi, \quad (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2)\mathbf{v}_0 = 0; \quad (3.9a)$$

- *касательные компоненты:*

$$[\mathbf{v}_0, (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)] = 0, \quad [\mathbf{v}_0, (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)] = \eta, \quad (3.9b)$$

где ξ – плотность поверхностного заряда, η – плотность поверхности тока проводимости.

Отсюда нетрудно вывести частные формы граничных условий, например, для электромагнитных процессов при $\xi = 0$ или/и $\eta = 0$. Можно также переформулировать все граничные условия относительно векторов напряженностей либо векторов индукций.

Важно отметить, что благодаря граничным условиям (3.9), мы располагаем информацией о характере поля на той или иной границе, еще не зная самого поля. Граничные условия, таким образом, универсальны. Даваемая граничными условиями информация необходима для получения частных решений уравнений Максвелла при наличии разнородных сред.

Следует, однако, иметь в виду, что кроме полученных нами граничных условий, вытекающих из уравнений Максвелла, должны использоваться и независимые граничные условия, которые обычно выражают внешнюю причину существования поля (до сих пор мы исследовали поведение уже существующего поля на границе, не вдаваясь в причины его появления и не рассматривая информацию об источнике поля). Независимые граничные условия мы обсудим позже.

Глава 4

ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

1. Предварительные замечания

Когда говорят о реальности электромагнитного поля, подразумевают, что с полем связана энергия. Изменяясь, поле может отдавать свою энергию какому-либо неэлектромагнитному процессу или отбирать ее. Электромагнитные поля, кроме того, способны переносить энергию в пространстве.

Выделим некоторую область V (рис. 4.1). Пусть в момент t энергия электромагнитного поля, заключенного в области V есть $W(t)$. Может оказаться, что со временем: $dW/dt < 0$ или $dW/dt > 0$.

В первом случае энергия в области V уменьшается. Это может быть связано с наличием поглощения в среде, с «отдачей энергии в полезную нагрузку»; при этом энергия поля превращается в другие формы (например, переходит в тепло или расходуется на совершение механической работы). Причиной убывания W в V может быть и наличие излучения из V во внешнюю среду.

Во втором случае энергия в области V возрастает, что может быть связано с действием источников в V (генерацией поля), притоком энергии извне и т.д.

В связи с проблемой превращения энергии рассмотрим вопрос перемещения зарядов в поле. В электрическом поле на положительный точечный заряд q действует сила $\mathbf{E}q$, которая, при движении заряда на пути Δl совершает работу $\mathbf{E}q\Delta l$, отнимая энергию поля. Если представить себе, что поле, появляясь в некоторый момент, вызывает движение зарядов, то возникающий при этом ток проводимости является процессом вторичным, требующим затраты энергии поля.

Однако, регулярное (нехаотическое) движение зарядов может происходить и в результате действия сил, не имеющих отношения к электромагнитному полю, так называемых *сторонних электродвижущих сил*. Если под действием сторонней силы заряд движется против поля \mathbf{E} , то работа на пути Δl будет отрицательной: $-\mathbf{E}q\Delta l$, т.е. сторонняя сила увеличивает энергию электромагнитного поля. Очевидно, что наличие сторонних сил того или иного происхождения необходимо при преобразовании какой-либо энергии в энергию электромагнитного поля.

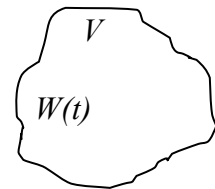


Рис. 4.1

Описание сторонних сил чаще всего сводится к обобщению «материального» уравнения $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$:

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{CT}}) \quad \text{или} \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}^{\text{CT}}, \quad (4.1)$$

где \mathbf{E}^{CT} – напряженность сторонних сил, \mathbf{j}^{CT} – плотность стороннего тока.

Обе записи можно считать эквивалентными, если положить $\mathbf{j}^{\text{CT}} = \sigma \mathbf{E}^{\text{CT}}$, однако условия их применения все же различны (как мы убедимся в дальнейшем).

Хотя электромагнитное поле и производит непосредственное действие на наши органы чувств (свет, тепло и т.д.), все же основную научную информацию о нем получают, изучая превращения его энергии в иные формы (например, электрохимические, фото- и теплоэлектрические, электромеханические и т.д.). Специфические особенности всех этих видов превращения энергии электромагнитного поля, конечно, не рассматриваются в курсе электродинамики. Предметом электродинамики является изучение самой энергии электромагнитного поля в ее превращениях и движении. При этом, мы должны установить связи между векторными функциями, описывающими поле (\mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{D} , \mathbf{B}), и энергетическими характеристиками электромагнитных процессов, к чему мы и приступим.

2. Закон Джоуля-Ленца

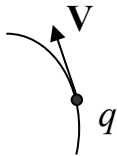


Рис. 4.2

На точечный заряд, движущийся в электромагнитном поле (рис. 4.2), действует сила:

$$\mathbf{F} = q[\mathbf{E} + [\mathbf{V}, \mathbf{B}]]$$

При этом, для векторного дифференциала пути $d\mathbf{l}$ дифференциал работы имеет вид:

$$dA = \mathbf{F}d\mathbf{l} = q\mathbf{E}d\mathbf{l} + q[\mathbf{V}, \mathbf{B}]d\mathbf{l} = q\mathbf{E}d\mathbf{l} = 0,$$

так как $\mathbf{V} \parallel d\mathbf{l}$ (магнитное поле работы не производит). Таким образом, мощность P (определяемая как работа в единицу времени) равна:

$$P = \frac{dA}{dt} = q\mathbf{E} \frac{dl}{dt} = q\mathbf{E}\mathbf{V}, \quad [\text{Вт}] \quad (4.2)$$

В качестве q можно взять заряд, содержащийся в элементарном объеме ΔV : $\Delta q = \rho \Delta V$. Тогда мощность ΔP в объеме ΔV будет равна:

$$\Delta P = \rho \Delta V \mathbf{E} \mathbf{v} = \mathbf{j} \mathbf{E} \Delta V, \quad (4.3)$$

а величина:

$$p = \mathbf{j} \mathbf{E} \quad (4.4)$$

будет выражать плотность мощности в объеме. Согласно формальному определению:

$$p = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta V}, \quad [\text{Вт/м}^3] \quad (4.5)$$

Используя материальное уравнение $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, равенству (4.4) можно придавать различное физическое содержание в соответствии со смыслом величины σ .

В отсутствие сторонних сил происходит работа (потери, поглощение) энергии электромагнитного поля. В этих случаях мы будем использовать у соответствующих величин индекс «П». В наиболее распространенном случае $\sigma > 0$ – скалярная величина.

При этом из (4.4) имеем:

$$p_{\text{П}} = \mathbf{j} \mathbf{E} = \sigma E^2 = \frac{j^2}{\sigma}. \quad (4.6)$$

Чтобы найти мощность потерь $P_{\text{П}}$ в каком-либо объеме V , надо проинтегрировать $p_{\text{П}}$ по V :

$$P_{\text{П}} = \int_V \mathbf{j} \mathbf{E} dV = \int_V \sigma E^2 dV = \int_V \left(\frac{j^2}{\sigma} \right) dV. \quad (4.7)$$

Убедимся, что физическое содержание равенств (4.6), (4.7) согласуется с известным законом Джоуля-Ленца. Применим (4.7) к области V в виде цилиндра (рис. 4.3):

$$\int \int_{l S} \mathbf{j} \mathbf{E} dl dS = El \cdot jS = UI, \quad (4.8)$$

где U – «падение напряжения» на участке l .

А это и есть формулировка закона Джоуля-Ленца для участка проводника. (Он был установлен при изучении тепловых потерь, имеющих место при постоянном токе).

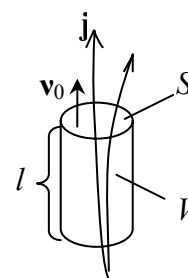


Рис. 4.3

3. Действие источников

Действие источников электромагнитного поля, обязаны своим существованием сторонним силам.

Обычно сторонние силы локализованы в источнике, поэтому введем понятие области источника V_Σ . При этом, в большинстве случаев имеется в виду, что:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}^{\text{ct}} \text{ в } V_\Sigma \quad \text{и} \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \text{ вне } V_\Sigma$$

Используя (4.4) и (4.1), запишем соотношения для плотности мощности:

$$p = \mathbf{jE} = \sigma^{-1} \mathbf{jj} - \mathbf{jE}^{\text{ct}}, \quad (4.9)$$

где $\sigma^{-1} \mathbf{j} = \mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{ct}}$, $\mathbf{E} = \sigma^{-1} \mathbf{j} - \mathbf{E}^{\text{ct}}$.

Когда выделена область V_Σ :

$$p = \sigma \mathbf{EE} + \mathbf{j}^{\text{ct}} \mathbf{E}, \quad (4.9a)$$

где $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}^{\text{ct}}$.

С учетом формулы (4.6) ($p_\Pi = \sigma E^2$) представим (4.9) в форме:

$$p = p_\Pi + p^{\text{ct}}. \quad (4.10)$$

Согласно этой формуле, плотность мощности есть сумма двух величин, одна из которых характеризует потери (поглощение) энергии, а другая (p^{ct}) – действие источников (сторонних сил).

Проинтегрировав (4.9) по некоторому объему V , получим:

$$P = P_\Pi + P^{\text{ct}}, \quad (4.11)$$

где

$$P^{\text{ct}} = - \int_V \mathbf{jE}^{\text{ct}} dV \quad \text{или} \quad P^{\text{ct}} = \int_V \mathbf{j}^{\text{ct}} \mathbf{E} dV \quad (4.12)$$

есть величина, называемая мощностью сторонних сил (или мощностью источников) в области V_Σ .

Мощность потерь P_Π выражается, как мы уже знаем, формулой (4.7).

Отметим, что, если сторонние силы совершают работу «против сил поля» (т.е. происходит процесс превращения энергии некоторого неэлектромагнитного процесса в энергию электромагнитного поля), то p^{ct} , $P^{\text{ct}} < 0$. Отметим также, что возможно и более широкое толкование членов $\sigma^{-1} \mathbf{jj}$ и $\sigma \mathbf{EE}$ в (4.9). Во-первых, сама запись позволяет рассматривать анизотропные среды, когда σ – тензор (в частности, при этом $\sigma \mathbf{EE} \neq \sigma E^2$). Во-вторых, эти члены могут быть отрицательными. Например, в некоторых задачах скалярная величина $\sigma < 0$, что соответствует концепции отрицательного сопротивления при анализе генерации.

И, наконец, рассмотрим пример независимого граничного условия, о чем упоминалось в конце прошлой лекции.

Пусть имеется область V с границей S . Если на этой границе (если ее части) действуют сторонние силы, то это приводит к необходимости наложения дополнительного условия на решения уравнений Максвелла в области V :

$$E_{\tau} = E^{\text{ст}} \text{ на } S. \quad (4.13)$$

Это и есть пример независимого граничного условия, выражающего причину существования электромагнитного поля.

4. Уравнение баланса энергии

Получим уравнение баланса энергии, для чего обратимся к основным уравнениям Максвелла.

Умножим все члены второго уравнения Максвелла на $\mathbf{H} \rightarrow (\mathbf{H} \text{rot} \mathbf{E} = -\mathbf{H}(\partial \mathbf{D} / \partial t))$, а первого – на $\mathbf{E} \rightarrow (\mathbf{E} \text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{E}(\partial \mathbf{D} / \partial t) + \mathbf{jE})$, затем вычтем из первого полученного равенства второе:

$$\text{div}[\mathbf{E}, \mathbf{H}] = -\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{jE}. \quad (4.14)$$

Используем дифференциальную формулу векторного анализа:

$$\text{div}[\mathbf{F}, \mathbf{G}] = \mathbf{G} \text{rot} \mathbf{F} - \mathbf{F} \text{rot} \mathbf{G}.$$

Получим теперь интегральную форму равенства (4.14). Выберем некоторую замкнутую поверхность S и проинтегрируем (4.14) по объему V , ограниченному поверхностью S :

$$\int_V \text{div}[\mathbf{E}, \mathbf{H}] dV = - \int_V \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV - \int_V \mathbf{jE} dV.$$

Используем теорему Остроградского-Гаусса:

$$\oint_S [\mathbf{E}, \mathbf{H}] dS = - \int_V \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV - \int_V \mathbf{jE} dV. \quad (4.15)$$

Уравнение (4.15) представляет собой уравнение баланса энергии электромагнитного поля в области V . Рассмотрим физический смысл отдельных его членов.

А). Последний член в (4.15) следует трактовать как мощность $P=P_{\Pi}+P^{ct}$. Будем считать, что это – полная мощность, т.е. все процессы превращения энергии в V связаны только с током проводимости (при $\mathbf{j}=0$ будем полагать, что превращений энергии нет. Таким образом, мы, в данном случае, не будем учитывать потери энергии, происходящие при поляризации и намагничивании среды);

Б). Если область V энергетически изолирована, то :

$$P = -\frac{dW}{dt}, \quad (4.16)$$

где W – запас энергии в V . Действительно, любые превращения энергии в области V могут происходить только при изменении этого запаса. В частности, когда преобладает поглощение ($P > 0$), то W уменьшается ($dW/dt < 0$).

При энергетической изоляции области V поле не проникает за границу S , следовательно, интеграл по замкнутой поверхности S равен нулю, таким образом:

$$P = -\int_V \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV. \quad (4.17)$$

Сравнивая (4.16) и (4.17), найдем:

$$\int_V \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV = \frac{dW}{dt}. \quad (4.18)$$

Отсюда следует физический смысл первого члена в правой части уравнения баланса энергии: это есть изменение энергии (производная по времени) в области V .

Придадим полученному выводу универсальное значение, записав его в виде:

$$P_{\Sigma} + \frac{dW}{dt} + P = 0, \quad (4.19)$$

где

$$P_{\Sigma} = \oint_S [\mathbf{E}, \mathbf{H}] d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{\Pi} d\mathbf{S}, \quad (4.20)$$

где $\mathbf{\Pi}$ – вектор Пойнтинга.

Остается обсудить подробности баланса энергии, выраженного равенством (4.19).

5. Вектор Пойнтинга и баланс энергии

Если область V не изолирована энергетически, то поток вектора $\mathbf{\Pi}$ отличен от нуля.

Рассмотрим три возможных типа баланса энергии электромагнитного поля, определенных следующими условиями:

$$1) \frac{dW}{dt} + P < 0 \Leftrightarrow P_{\Sigma} > 0;$$

$$2) \frac{dW}{dt} + P = 0 \Leftrightarrow P_{\Sigma} = 0;$$

$$3) \frac{dW}{dt} + P > 0 \Leftrightarrow P_{\Sigma} < 0.$$

Первое условие отвечает случаю *активного баланса*, когда сумма скорости изменения запаса энергии в области V и полной мощности отрицательна. В уравнении баланса эта отрицательная величина уравнивается потоком P_{Σ} . Таким образом, убывание запаса энергии и/или генерация вызывают переход энергии через границу S во внешнюю среду, т.е. *излучение*.

Вектор P_{Σ} равен при этом излучаемой за единицу времени энергии (мощности излучения). В простейшем варианте, запас энергии в V остается постоянным ($dW/dt=0$) и поглощение отсутствует ($P_{\Pi}=0$). Тогда $P_{\Sigma} = -P^{ct}$.

Второе условие не обязательно означает, что область V изолирована энергетически. Этот тип баланса возможен и при открытой границе и называется *нейтральным балансом*.

Наконец, при третьем условии имеет место *пассивный баланс энергии* в V : положительная величина $dW/dt + P$ уравнивается отрицательным потоком вектора $\mathbf{\Pi}$. Это значит, что внутренние потери ($P > 0$) или затраты энергии на увеличение ее запаса ($dW/dt > 0$) покрываются притоком энергии извне.

Поток P_{Σ} вектора $\mathbf{\Pi}$ направлен внутрь области и отрицателен по величине. По абсолютной величине он равен энергии, поглощаемой областью V через ее границу S за единицу времени (т.е. мощности поглощения). В частности, если запас энергии в V постоянен ($dW/dt = 0$) и отсутствуют сторонние силы ($P^{ct} = 0$), то $P_{\Sigma} = -P_{\Pi}$, где P_{Π} – мощность потерь.

Наши рассуждения показывают, что поток P_{Σ} вектора $\mathbf{\Pi}$ всегда равен по абсолютной величине энергии, проходящей за единицу времени через границу S некоторой замкнутой области V . Эта величина называется *потоком энергии*. Поток энергии положителен, при отдаче энергии (излучение), и отрицателен – при поглощении.

Поскольку поток энергии, формально, есть поток вектора Пойнтинга, его можно наглядно иллюстрировать, строя картины векторных линий Π . Так, можно привести примеры трех случаев баланса (рис. 4.4-4.6):

1) случаи *активного баланса энергии*:

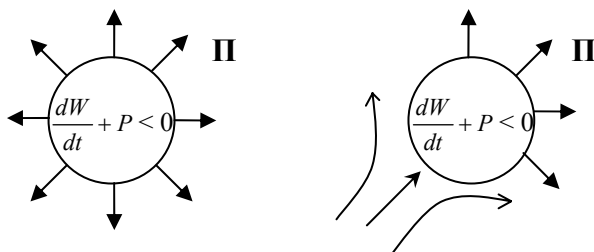


Рис. 4.4

2) случаи *нейтрального баланса энергии*:

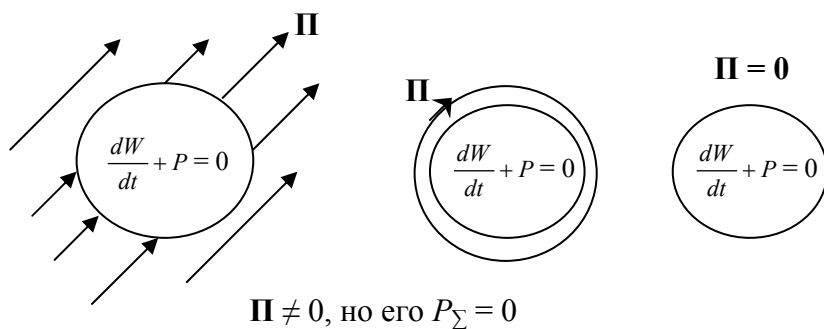


Рис. 4.5

3) случаи *пассивного баланса энергии*:

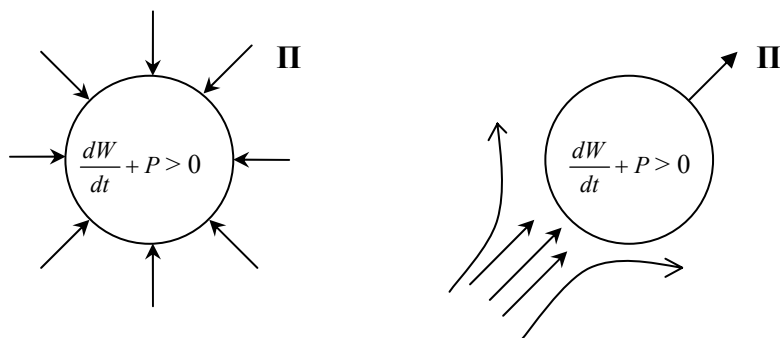


Рис. 4.6

6. Энергия электромагнитного поля

Полученную нами формулу (4.18) можно использовать для нахождения выражения энергии W поля в области V .

Считая, что процессы поляризации и намагничивания безинерционны (так, что ε и μ не зависят от t), в случае изотропии будем иметь:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\mathbf{E}^2}{2} \right), \\ \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \mu_r \frac{\mathbf{H}^2}{2} \right).\end{aligned}$$

Тогда из (4.18):

$$W = \frac{1}{2} \int_V \left(\varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}^2 + \mu_0 \mu_r \mathbf{H}^2 \right) dV = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{H}\mathbf{B}) dV. \quad (4.21)$$

Подынтегральную величину

$$w = \frac{1}{2} (\mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{H}\mathbf{B}) \quad (4.22)$$

следует истолковывать как прочность энергии

$$w = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta V}. \quad (4.23)$$

Формулы (4.21) и (4.22) показывают характер распределения энергии поля в пространстве (ее локализация). Из (4.21) видно, что энергия W представляет собой сумму двух слагаемых, одно из которых зависит только от магнитного поля – магнитная энергия

$$W^M = \frac{\mu_0}{2} \int_V \mu_r \mathbf{H}^2 dV, \quad (4.24a)$$

другое – только от электрическое поля – электрическая энергия

$$W^Э = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V \varepsilon_r \mathbf{E}^2 dV \quad (4.24б)$$

и

$$W = W^M + W^Э.$$

Соответственно различают плотности электрической и магнитной энергии в (4.22):

$$w^M = \mu_0 \mu_r \frac{\mathbf{H}^2}{2} \quad \text{и} \quad w^Э = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\mathbf{E}^2}{2}.$$

7. Смысл вектора Пойнтинга $\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$

Если допустить, что поток $\mathbf{\Pi}$ через всякую (не только замкнутую) поверхность S выражает проходящий через нее поток энергии, то $\mathbf{\Pi}$ есть плотность потока энергии:

$$\mathbf{\Pi} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \boldsymbol{\pi}_0 \frac{\Delta W}{\Delta S}, \quad (4.25)$$

где $\boldsymbol{\pi}_0$ – единичный вектор, указывающий направление движения энергии;

ΔS – ориентированная ортогонально $\boldsymbol{\pi}_0$ площадка;

ΔW – количество энергии, проходящей через ΔS за секунду.

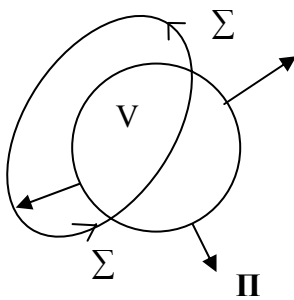


Рис. 4.7

Такая интерпретация $\mathbf{\Pi}$ отвечает современным физическим воззрениям, однако она не следует непосредственно из рассмотренного нами материала, так как полный поток энергии через замкнутую поверхность не изменится, если его плотностью считать не $\mathbf{\Pi}$, а $\mathbf{\Pi} + \boldsymbol{\Sigma}$, где $\boldsymbol{\Sigma}$ – любая соленоидальная функция ($\text{div} \boldsymbol{\Sigma} = 0$), поток добавочного вектора $\boldsymbol{\Sigma}$ через всякую замкнутую поверхность равен нулю (см. рис. 4.7).

Отметим, что равенство (4.25) имеет точно такую же форму, как и определение плотности тока проводимости \mathbf{j} .

Введем теперь в рассмотрение уравнение (4.14), которому можно придать вид:

$$\text{div} \mathbf{\Pi} + \frac{\partial w}{\partial t} + \rho = 0, \quad (4.14a)$$

где ρ – плотность мощности.

При $\rho = 0$ это уравнение аналогично уравнению непрерывности, для объемной плотности заряда ρ . При $\rho \leftrightarrow w$ и $\mathbf{\Pi} \leftrightarrow \mathbf{j}$ одно уравнение переходит в другое.

Можно также легко получить аналог равенства $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$:

$$\mathbf{\Pi} = w \mathbf{v}_\varphi$$

[вывод формулы аналогичен выводу формулы (2.11)].

Это соотношение связывает $\mathbf{\Pi}$, плотность энергии и скорость движения энергии, которая, следовательно, всегда может быть найдена, если известны векторы электромагнитного поля.

Возвращаясь к уравнению (4.14а), подчеркнем, что это – уравнение баланса энергии в дифференциальной форме. Оно характеризует локальное сохранение энергии.

Если в исчезающе малой окрестности некоторой точки имеет место активный баланс энергии, то в этой точке $\partial W / dt + p < 0$ и, следовательно, $\text{div}\mathbf{\Pi} > 0$. Аналогично в случаях нейтрального и пассивного баланса.

Таким образом, о характере локального баланса энергии можно судить по векторным линиям $\mathbf{\Pi}$: они начинаются в точках активного баланса и заканчиваются в точках пассивного, проходя, не прерываясь, через точки нейтрального баланса.

Глава 5

КЛАССЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ЯВЛЕНИЙ

Центральное место среди положений теории электромагнитных явлений занимают уравнения Максвелла.

Поведение полей на границах раздела двух сред описывается граничными условиями, которые используются при формулировке конкретных задач для уравнений Максвелла.

Формулировка конкретной задачи должна быть физически определенной, для этого, в большинстве случаев должна быть формализована причина существования поля в виде его источников. В связи с этим нами было введено понятие сторонних сил, которые могут задаваться путем замены последнего из материальных уравнений ($\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$) на уравнение, учитывающего напряженность поля сторонних или плотность тока сторонних сил, а также или при помощи независимых граничных условий [например, вида (4.13)].

В этом случае система уравнений Максвелла рассматривается в теории электромагнетизма как основа дедуктивного анализа всевозможных электромагнитных процессов, электромагнитные процессы исследуются путем выведения следствий из общих положений теории.

Переход от уравнений Максвелла к уравнениям, описывающим частные классы электромагнитных явлений, производится путем положения соответствующих ограничений. Например, переход к стационарным (т.е. неизменным во времени) полям легко осуществить, положив в уравнениях все временные производные равными нулю. Система уравнений Максвелла в этом случае примет вид:

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} \\ \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \end{array} \right\} \quad (5.0)$$
$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \\ \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \end{array} \right\}$$

В левом столбце стоят величины, характеризующие электрическое поле, в правом – магнитные. Если еще более сузить класс полей, не рассматривая токи ($\mathbf{j} = 0$), то уравнения в левом и правом столбцах оказываются совершенно независимыми. Это – уравнения электростатики и магнитостатики. К рассмотрению этих классов электромагнитных явлений мы сейчас и перейдем.

1. Электростатика

Электростатическими называются стационарные (независимые во времени) электромагнитные поля при отсутствии токов.

В действительности, конечно, в чистом виде электростатических полей не существует, так как все среды обладают электропроводностью ($\sigma \neq 0$) в той или иной степени, и при $\mathbf{E} \neq 0$, $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \neq 0$. По этой причине заряженный предмет со временем теряет свой заряд вследствие его утечки (отсутствие стационарности).

Таким образом, электростатические поля – это некоторая идеализация, допустимая, когда магнитная энергия процесса пренебрежимо мала по сравнению с электрической.

1.1. Уравнения электростатики и электростатический потенциал

В случае электростатики система уравнений Максвелла приобретает следующий вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \quad (5.1a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (5.1б)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} \quad (5.1в)$$

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0 \quad (5.2a)$$

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = q \quad (5.2б)$$

Пусть среда однородна и изотропна (ε_r – не зависит от координат и является скалярным коэффициентом). Применяя к (5.1a) операцию rot и представляя $\operatorname{rot} \operatorname{rot}$, при помощи формулы векторного анализа

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{F} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{F} - \nabla^2 \mathbf{F},$$

а также заменяя $\operatorname{div} \mathbf{E}$ из формул (5.1б), (5.1в) на $\rho / \varepsilon_0 \varepsilon_r$, получим:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \operatorname{grad} \rho. \quad (5.3)$$

Это – *векторное уравнение Пуассона* относительно напряженности электрического поля, создаваемого зарядом, распределенным с плотностью ρ . Вывод этого уравнения выполним только при дифференцируемости функции ρ .

При отсутствии зарядов ($\rho=0$) уравнение (5.3) переходит в векторное уравнение Лапласа:

$$\nabla^2 \mathbf{E} \equiv \Delta \mathbf{E} = 0. \quad (5.4)$$

Это уравнение возникает и при $\rho = \text{const}$, так как в этом случае $\text{grad} \rho = 0$.

Известно, что в случае безразличной среды решение уравнения Пуассона (5.3) будет иметь вид:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \int_V \frac{\text{grad} \rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (5.5)$$

(интегрирование производится по штрихованным переменным). Каким образом оно получается – см. в литературе по курсу электродинамики.

Имея в виду математическое свойство, выраженное уравнением (5.1а), говорят, что электрическое поле \mathbf{E} является *безвихревым* или *потенциальным*. Последний термин связан с тем, что напряженность \mathbf{E} можно представить в виде:

$$\mathbf{E} = -\text{grad} \varphi, \quad (5.6)$$

где скалярная функция φ называется *электростатическим потенциалом*.

Равенство (5.6) является очевидным, если учесть векторное тождество $\text{rot} \text{grad} \varphi = 0$, применив его к (5.6). Выбор знака в уравнении (5.6) является традиционным.

С математической точки зрения, введение φ означает возможность сведения векторных уравнений электростатики к скалярным (через φ), а это является существенным упрощением.

Рассмотрим *физический смысл функции φ* .

Пусть в электростатическом поле перемещается (как угодно медленно, чтобы пренебречь током) точечный заряд q . Работа, совершенная при этом на пути l (от точки M_1 до M_2 – см. рис. 5.1), вычисляется путем интегрирования:

$$A = \int_{M_2}^{M_1} \mathbf{F} d\mathbf{l} = q \int_{M_2}^{M_1} \mathbf{E} d\mathbf{l} = -q \int_{M_2}^{M_1} \text{grad} \varphi d\mathbf{l}. \quad (5.7)$$

Далее, представим дифференциал длины $d\mathbf{l}$ в декартовых координатах:

$$d\mathbf{l} = \mathbf{i} dx + \mathbf{j} dy + \mathbf{k} dz$$

Скалярное произведение $\text{grad } \varphi$ на $d\mathbf{l}$ даст полный дифференциал φ :

$$\mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = d\varphi$$

и из формулы (5.7) мы получим:

$$\int_{M_2}^{M_1} d\varphi = \varphi_1 - \varphi_2, \quad (5.8)$$

где φ_1 и φ_2 – значения потенциала в точках M_1 и M_2 (рис. 5.1).

Таким образом, произведенная работа равна разности потенциалов начальной и конечной точек пути, умноженной на величину q :

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (5.9)$$

В формуле (5.9) никак не отражен характер пути, соединяющего точки M_1 и M_2 , то есть работа от пути не зависит, а это значит, что работа, совершаемая при перемещении заряда по замкнутому контуру $M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_1$ равна нулю.

Сравнивая (5.9) и (5.7), получим:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{M_2}^{M_1} \mathbf{E} d\mathbf{l}. \quad (5.10)$$

Эту формулу можно рассматривать как обращение формулы (5.6).

Произведенные рассуждения показывают, что четким физическим содержанием обладает *разность потенциалов*, отвечающих любым двум точкам в электростатическом поле. Это – работа, производимая полем при перемещении единичного положительного точечного заряда ($q = +1$) на пути $M_1 M_2$. При этом функция φ определена лишь с точностью до слагаемого, так как формулы (5.6) и (5.10) сохраняют свой вид при замене $\varphi \rightarrow \varphi + C$. При необходимости, можно каким-либо образом определить константу C , сделав электростатический потенциал φ вполне определенным. Так, в технике бывает удобным положить потенциал Земли, корпуса прибора и т.п. равным нулю. В электростатике обычно принимают равным нулю потенциал бесконечно удаленной точки. Тогда, согласно (5.10),

$$\varphi = \int_M^{\infty} \mathbf{E} d\mathbf{l}. \quad (5.11)$$

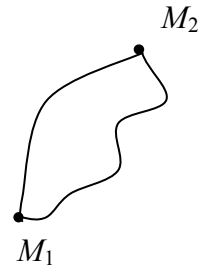


Рис. 5.1

Потенциал оказывается равным работе, совершаемой при удалении единичного положительного точечного заряда q из точки M в бесконечность.

Исходя из основных уравнений электростатики, нетрудно получить уравнение, которому удовлетворяет электростатический потенциал φ . Это уравнение получается при исключении \mathbf{D} из (5.1б), (5.1в) $\operatorname{div}(\varepsilon_0\varepsilon_r\mathbf{E}) = \rho$ с заменой \mathbf{E} на $-\nabla\varphi$:

$$\varepsilon_0 \operatorname{div}\varepsilon_r \operatorname{grad}\varphi = -\rho. \quad (5.12)$$

В случае однородной изотропной среды ($\varepsilon_r = \text{const}$), отсюда получается уравнение Пуассона для потенциала:

$$\nabla^2\varphi = \nabla\varphi = -\rho\varepsilon_0\varepsilon_r, \quad (5.13)$$

а для областей, в которых заряд отсутствует – уравнение Лапласа:

$$\nabla^2\varphi = \nabla\varphi = 0. \quad (5.14)$$

Общий вид решения уравнения Пуассона (5.13) в случае неограниченной среды следующий:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (5.15)$$

1.2. Простейшие электростатические поля

1.2.1. Пусть имеется оди́ночный точечный заряд q , находящийся в однородной изотропной среде.

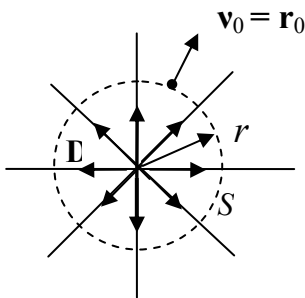


Рис. 5.2

Векторные линии электрической индукции есть радиальные прямые, расположенные через равные интервалы, так как все направления физически равноправны (рис. 5.2).

Найдем \mathbf{D} на расстоянии r от заряда, описав вокруг него среду радиуса r . Поскольку вектора \mathbf{D} образуют нормали к поверхности S сферы, то $\mathbf{D}d\mathbf{S} = DdS$.

Воспользуемся теоремой Гаусса:

$$\oint_S \mathbf{D}d\mathbf{S} = D \oint_S dS = 4\pi r^2 D = q \Rightarrow D = \frac{q}{4\pi r^2},$$

где величина \mathbf{D} на поверхности сферы неизменна.

В векторной форме:

$$\mathbf{D} = \mathbf{r}_0 \frac{q}{4\pi r^2}.$$

Если положить, что начало координат не совмещено с точкой нахождения заряда (более общий случай – см. рис. 5.3), то формула примет вид:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}_{0q} \frac{q}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}, \quad (5.16)$$

где $\mathbf{r}_{0q} = \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ – единичный вектор, соответствующий направлению $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$.

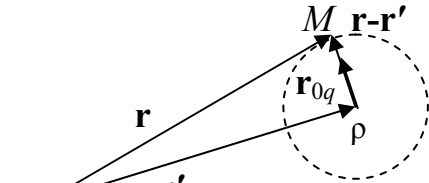


Рис. 5.3

Из формулы (5.16), учтя (1с), легко выразить напряженность электрического поля \mathbf{E} . Далее, по формуле (5.11) можно вычислить и потенциал φ точечного заряда. Определяя потенциал φ в точке $M(\mathbf{r})$, произведем интегрирование вдоль радиального направления $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ (PM). Учтем, что в формуле (5.11) при таком выборе пути векторы \mathbf{E} и $d\mathbf{l}$ параллельны. В результате будем иметь:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (5.16a)$$

(напомним, что среда считается однородной и изотропной).

1.2.2. Пусть теперь имеется система точечных зарядов q_i ($i = 1, 2, \dots$), расположенных в однородной и изотропной среде, которую, кроме того, будем считать линейной.

На основании принципа суперпозиции напряженность поля будет находиться по формуле:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_i \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \sum_i \mathbf{r}_{0i} \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|}, \quad (5.17)$$

где \mathbf{E}_i – напряженность поля заряда q_i , расположенного в точке $M(\mathbf{r}_i)$;

$\mathbf{r}_{0i} = \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|}$ – единичный вектор направления от точки $M(\mathbf{r}_i)$ к точке $M(\mathbf{r})$.

Аналогично определяется потенциал в точке $M(\mathbf{r})$:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|}. \quad (5.18)$$

1.2.3. Рассмотрим теперь системы зарядов, которые, в целом, являются нейтральными.

Система зарядов называется *нейтральной*, если ее полный заряд равен нулю:

$$\sum_i q_i = 0. \quad (5.19)$$

В простейшем случае – это система двух зарядов.

Пусть $q_1 = -q = -q_2$ ($q > 0$), а ориентацию системы охарактеризуем векторным элементом длины l , соединяющим заряды и направленным от минуса к плюсу (рис. 5.4).

По формуле (5.18) можно найти потенциал φ такой системы в некоторой точке $M(\mathbf{r})$:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \right). \quad (5.20)$$

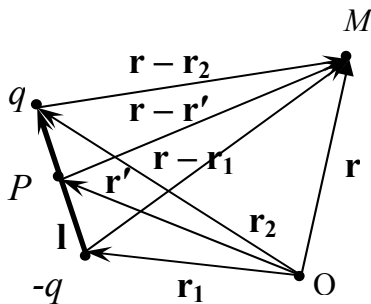


Рис. 5.4

Если расстояние от точки наблюдения (точки M) до любой точки P , лежащей на l , значительно превышает длину l , систему зарядов называют *диполем*.

Величина

$$\mathbf{p} = ql \quad (5.21)$$

называется *электрическим моментом* диполя.

Если теперь рассматривать предельный случай сближения зарядов ($l \rightarrow 0$) при сохранении момента \mathbf{p} , то получаемая система называется *идеальным диполем*. Потенциал создаваемого им поля легко определить из (5.20):

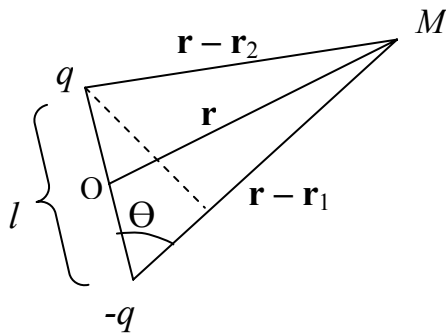


Рис. 5.5

$$\varphi(\mathbf{r}) = \lim_{\substack{l \rightarrow 0 \\ ql \rightarrow \text{const}}} \{(20)\} = \frac{\mathbf{p} \mathbf{r}_0 q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}, \quad (5.22)$$

так как $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 \rightarrow 0$, $\mathbf{r} - \mathbf{r}_2 \rightarrow 0$, $q|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| - q|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| \rightarrow ql \cos \theta = \mathbf{p} \mathbf{r}_0 q$.

Если же перенести начало осей координат в среднюю точку диполя (рис. 5.5), то

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r$$

и формула (5.22) приобретает более простой вид:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} = \frac{\mathbf{p}\mathbf{r}_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2}, \quad (5.22a)$$

причем r и θ – это сферические координаты точки наблюдения; \mathbf{r}_0 – единичный вектор направления \mathbf{r} (рис. 5.6).

Теперь по формуле $\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi$, с учетом выражения для градиента в сферических координатах, можно найти напряженность электрического поля \mathbf{E} , создаваемого диполем:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} (\mathbf{r}_0 2\cos\theta + \theta_0 \sin\theta). \quad (5.23)$$

Картина силовых линий такого поля будет выглядеть, как показано на рис. 5.7.

В более сложном случае система (нейтральная) может состоять из произвольного числа зарядов. Электрическим моментом такой системы называется вектор:

$$\mathbf{p} = \sum_i q_i \mathbf{r}_i. \quad (5.24)$$

Потенциал, определенный из равенства (5.18), для такой системы будет иметь вид:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} \sum_i q_i \mathbf{r}_i = \frac{\mathbf{p}\mathbf{r}_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2}. \quad (5.25)$$

Вообще говоря, равенство (5.25) является приближенным, точным же оно становится в пределе $r_i/r \rightarrow 0$ ($p = \text{const}$) (рис. 5.8), где \mathbf{r}_i – координата i -го заряда; \mathbf{r} – координата точки наблюдения. Совпадение равенств вида (5.22a) и (5.25) говорит о том, что всякая нейтральная система ведет себя подобно диполю с тем же моментом.

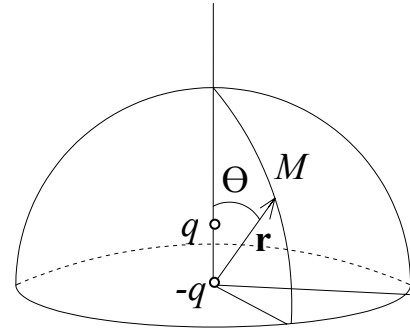


Рис. 5.6

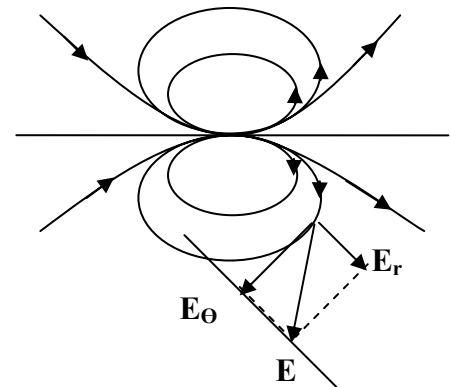


Рис. 5.7

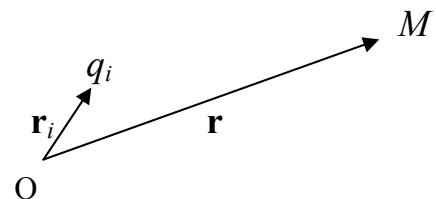


Рис. 5.8

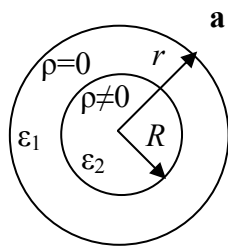
1.2.4. И, наконец, в ряду простейших полей рассмотрим поля, определяемые по теореме Гаусса. Таким путем можно легко определить поля, обладающие определенной степенью симметрии.

Формула $\mathbf{D} = \mathbf{r}_0 \left(q / 4\pi r^2 \right)$, полученная нами для поля точечного заряда, фактически пригодна для определения полей с такой же центральной симметрией.

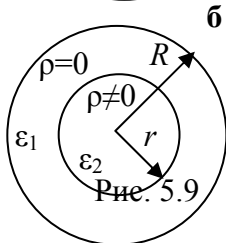
В качестве примера рассмотрим равномерно заряженный шар радиуса R ($\rho = \text{const}$). Полный заряд шара есть

$$q = \frac{4\pi R^3 \rho}{3},$$

и поскольку поле вне шара обладает такой же симметрией, как и поле точечного заряда, то (рис. 5.9а):



$$\mathbf{E} = \mathbf{r} \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2} = \mathbf{r} \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 \epsilon_r r^2}, \quad r > R, \quad (5.26)$$



Поле внутри шара (рис. 5.9б) находится аналогично, надо только, в соответствии со смыслом теоремы Гаусса, вместо полного заряда q брать заряд, заключенный внутри сферы радиуса $r > R$. Обозначая его через q' , имеем

$$\frac{q'}{q} = \left(\frac{r}{R} \right)^3, \quad q' = q \left(\frac{r}{R} \right)^3.$$

Поэтому:

$$\mathbf{E} = \mathbf{r} \frac{q r}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r R^3} = \mathbf{r} \frac{\rho r}{3 \epsilon_1 \epsilon_2}, \quad r < R. \quad (5.27)$$

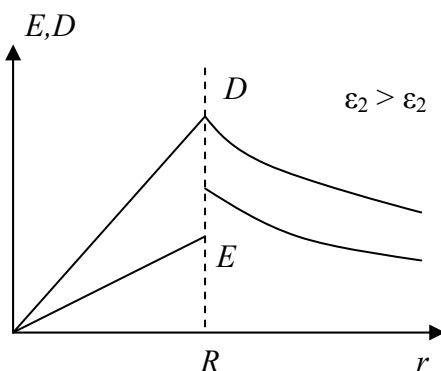


Рис. 5.10

Из этой формулы видно, что поле внутри равномерно заряженного шара возрастает с ростом r линейно, вне шара оно убывает пропорционально r^{-2} (рис. 5.10).

Вопрос: объяснить, почему в графике напряженности поля имеет место разрыв при $r = R$, а в графике D его нет.

Рассмотрим теперь случай осевой симметрии. Если вместо точечного заряда рассматривать равномерно заряженную

нить, то применение *теоремы Гаусса* $\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = q$ дает

$$\mathbf{D} = \mathbf{r} \frac{\tau}{2\pi r}, \quad (5.28)$$

где $\tau = q/l$ – заряд, приходящийся на единицу длины нити. Вывод этой формулы очень прост.

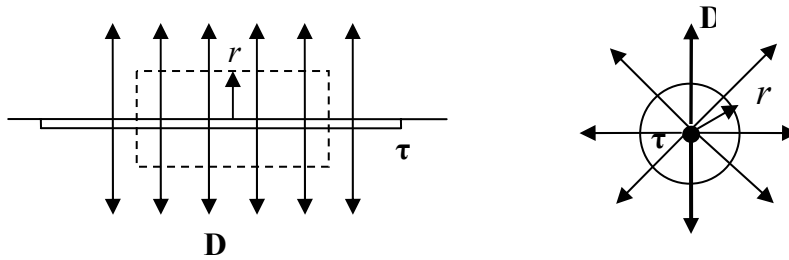


Рис. 5.11

Построив на отрезке нити коаксиальный цилиндр (рис. 5.11), видим, что силовые линии выходят только через его боковую поверхность ($S = 2\pi rl$) и согласно теореме Гаусса

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = D \oint_S dS = D 2\pi rl = q.$$

На основе соотношения (5.28) анализируются самые разнообразные поля с осевой симметрией. При помощи теоремы Гаусса можно также находить поля в плоскостных системах.

2. Проводники и диэлектрики электростатическом поле

2.1. Поля, потенциалы и заряды

В силу последнего материального уравнения $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ в проводнике ($\sigma \neq 0$) при $\mathbf{E} \neq 0$ электростатическое поле отсутствует, так как $\mathbf{j} = 0$. Явления при наличии токов уже не относятся к электростатике.

Рассмотрим граничное условие тангенциальной компоненты \mathbf{E} на границе с диэлектрической средой:

$$(\mathbf{E}_{\text{пр}} - \mathbf{E}_{\text{д}}) \boldsymbol{\tau}_0 = 0.$$

Поскольку поле внутри проводника отсутствует, то его тангенциальная

компонента на границе раздела сред S

$$\mathbf{E}_{\text{пр}} \boldsymbol{\tau}_0 = 0. \quad (5.29)$$

Таким образом, \mathbf{E} имеет на S только нормальную компоненту, причем из граничного условия $(\mathbf{D}_{\text{пр}} - \mathbf{D}_{\text{д}}) \mathbf{v}_0 = \xi$, следует, что

$$\mathbf{D} \mathbf{v}_0 = \xi, \quad (5.30)$$

где \mathbf{v}_0 – единичный вектор нормали к S , ξ – плотность поверхностного заряда.

Условие (5.29) можно также истолковывать, как выражение постоянства потенциала на поверхности проводника:

$$\mathbf{E} \boldsymbol{\tau}_0 = -\partial \varphi / \partial \tau, \quad (5.31)$$

где в правой части стоит $-\text{grad}$, в котором подразумевается дифференцирование вдоль любого касательного направления. А поскольку $\text{grad } \varphi = 0$ из формулы (5.29), то потенциал постоянен вдоль поверхности проводника: $\varphi = \text{const}$ на S .

Итак, электростатические поля существуют только вне проводящих тел и электрические силовые линии ортогональны их поверхностям. Поверхности проводников эквипотенциальны и несут заряд [см. формулу (5.30)]. Из формулы (5.31) также следует, что внутри проводника потенциал постоянен (так как $\mathbf{E} = 0$, т.е. $\partial \varphi / \partial \tau = 0$, $\varphi = \text{const}$) и равен его значению на поверхности проводника.

Для наглядного пояснения сделанных выводов можно представить себе процесс установления электростатического поля в проводнике: заряды в проводнике под действием поля приходят в движение и, в конце концов, занимают равновесное положение на его поверхности. При этом заряды внутри проводника взаимно компенсируются. Отсутствие компоненты \mathbf{E}_{τ} на S объясняется тем, что при $\mathbf{E}_{\tau} \neq 0$ существовал бы поверхностный ток, чего в действительности нет.

Примеры электростатических полей показаны на рис. 5.12.

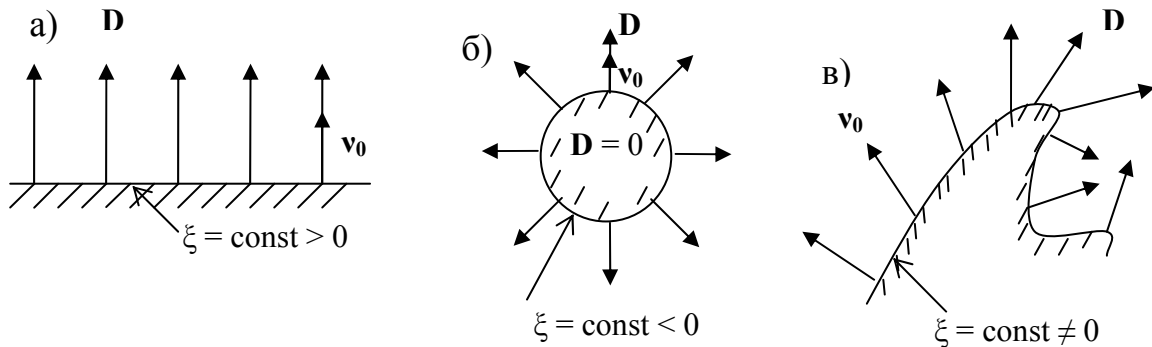


Рис. 5.12

В некоторых простейших случаях (см. рис. 5.12а,б) плотность поверхностного заряда проводника $\xi = \text{const}$ (в отличие от случая, показанного на рис. 5.12в). Поэтому иногда можно сразу найти поле на поверхности проводника по формуле (5.30), например, для шара:

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{r}q}{4\pi R^2} = \mathbf{r}\xi,$$

если, конечно, среда изотропна и однородна.

Рассмотрим теперь явление, называемое «электростатической индукцией». Пусть, к примеру, в однородное поле \mathbf{D} вносится плоский проводящий лист так, что его поверхность перпендикулярна \mathbf{D} (см. рис. 5.13).

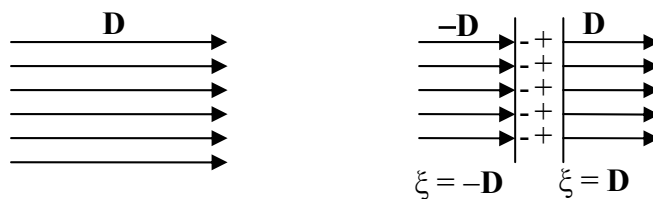


Рис. 5.13

Тогда, согласно (5.30), на обеих границах листа появляется поверхностный заряд с плотностью $\xi = \mathbf{D}$ и $\xi = -\mathbf{D}$, соответственно.

При помещении в поле некоторого тела C , имеющего ограниченные размеры, поле деформируется таким образом, чтобы силовые линии стали ортогональными проводящей поверхности (рис. 5.14). При этом, как следует из (5.30), появляется поверхностный заряд, который называют «наведенным» (или «индуцированным»). Разумеется, при этом не нарушается закон сохранения заряда: полный заряд тела q равен нулю (если он был таким до «взаимодействия» с полем).

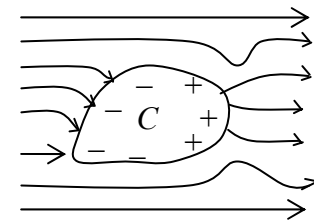


Рис. 5.14

Более сложным проявлением электростатической индукции является перераспределение заряда на поверхностях проводников при их перемещении (сближении, удалении) друг относительно друга.

При помещении в поле \mathbf{D} диэлектрика (относительная диэлектрическая проницаемость ϵ_{ri} , относительная диэлектрическая проницаемость среды ϵ_{re}) поле также деформируется. Изменения конфигурации не происходит лишь в простейшем случае (рис. 5.15), когда в поле вносится плоский лист диэлектрического материала перпендикулярно вектору \mathbf{D} . Внутри листа возникает поле \mathbf{E}_i , \mathbf{D}_i , связанное

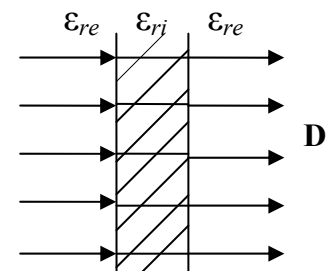


Рис. 5.15

с внешним полем $\mathbf{E}_e, \mathbf{D}_e$ условием:

$$\mathbf{D}_i \mathbf{v}_0 = \mathbf{D}_e \mathbf{v}_0, \quad (5.32)$$

причем на границе S нормальная компонента непрерывна, так как $S = 0$ (поверхность не несет заряда). Тангенциальная компонента при этом отсутствует.

Если же в поле вносится диэлектрик ограниченного размера, то поле неизбежно деформируется (рис. 5.16), при этом тангенциальная компонента существует и необходимо, помимо (5.32), учитывать и граничное условие для тангенциальной компоненты:

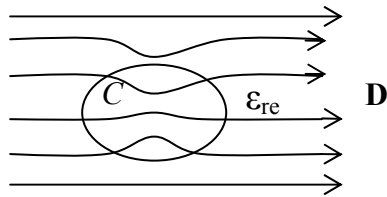


Рис. 5.16

$$\mathbf{E}_i \boldsymbol{\tau}_0 = \mathbf{E}_e \boldsymbol{\tau}_0. \quad (5.33)$$

Интересно, при этом, что внутри эллипсоидального тела, помещенного в однородное поле, также возникает однородное поле.

Внутренние процессы в проводниках и диэлектриках, находящихся в электрическом поле, существенно различны. В электростатике обычно пренебрегают наличием свободных зарядов в диэлектриках. Процессы поляризации, происходящие в них, объясняются переориентацией и деформацией структурных элементов вещества, которые рассматриваются как диполи.

2.2. Граничные задачи электростатики

Суть решения граничных задач электростатики состоит в определении электростатического поля при наличии тех или иных проводящих или диэлектрических тел, то есть требуется найти решения уравнений электростатики, удовлетворяющие граничным условиям. При этом, система граничных должна сообщать постановке задачи физическую определенность.

Пусть, например, задана совокупность проводящих тел. Распределение заряда на каждом из них не может быть заранее известно. Однако могут быть известны полные заряды каждого из тел или их потенциалы.

Одна из физически определенных граничных задач может быть поставлена следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= 0, \\ \varphi &= \Phi_i \text{ на } S_i \ (i = 1, 2, \dots, N), \end{aligned} \right\} \quad (5.34)$$

где первое уравнение – это *уравнение Лапласа*, второе равенство – *граничные условия*; S_i – поверхность i -го тела; Φ_i – потенциал поверхности S_i .

Это так называемая *задача Дирихле*, которая имеет единственное решение (т.е. вид функции φ единствен). Поэтому поле $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ есть единственно возможное для данных потенциалов Φ_i и, тем самым, физически определенное.

Такими же свойствами обладает задача для уравнения Лапласа, заданная с граничными условиями на заряды проводников.

Если же кроме проводящих тел имеются и диэлектрики, то в формулировке граничной задачи должны фигурировать и граничные условия на всех поверхностях диэлектриков, которые получаются из соотношений (5.32), (5.33).

Существует простой прием, позволяющий учитывать влияние плоских границ раздела сред на поля точечных зарядов. Это так называемое «*зеркальное изображение зарядов*».

Пусть сначала точечный заряд находится над проводящей границей (рис. 5.17). В результате электростатической индукции на этой границе должен появиться некоторый поверхностный заряд, создающий такое дополнительное поле, которое, налагаясь на первоначальное поле заряда, приводит к удовлетворению граничных условий.

Нетрудно убедиться, что поле будет таким, как если бы оно создавалось «зеркальным отображением» с противоположным знаком. Точнее говоря, для нахождения поля точечного заряда q , находящегося на расстоянии h над проводящей плоскостью P , надо рассмотреть систему зарядов q и $-q$ в свободном пространстве, расположенных на расстоянии $2h$ друг от друга (рис. 5.18).

Действительно, плоскость симметрии Q , к которой силовые линии подходят под прямым углом, эквипотенциально, а именно этим свойством должна обладать проводящая плоскость P . Поэтому поле над Q не будет отличаться от поля над P .

Это поле легко найти по формуле (5.17) как суперпозицию поля двух точечных зарядов:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v}_0 2 \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} \cos\theta = -\mathbf{v}_0 \frac{qh}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r r^3}. \quad (5.35)$$

Отсюда видно, что на плоскости P заряд распределен с плотностью:

$$\xi = \mathbf{D}\mathbf{v}_0 = \epsilon_0\epsilon_r \mathbf{E}\mathbf{v}_0 = -\frac{qh}{2\pi r^3}.$$

Полный наведенный заряд равен $-q$, в чем можно убедиться путем проверки.

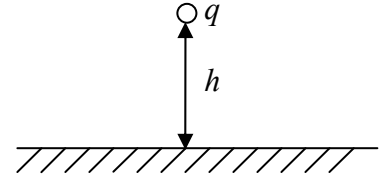


Рис. 5.17

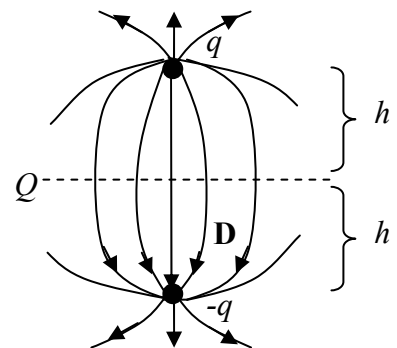


Рис. 5.18

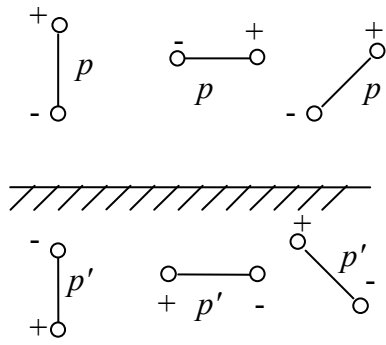


Рис. 5.19

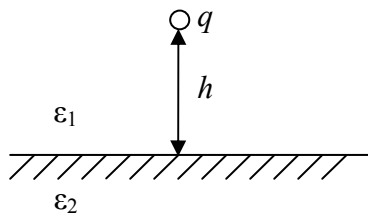


Рис. 5.20

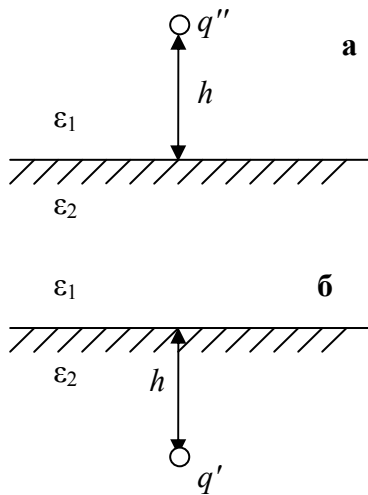


Рис. 5.21

Построение зеркальных изображений как метод решения электростатических задач оказывается достаточно простым, когда над проводящей плоскостью имеется система известных зарядов. Например, могут рассматриваться и диполи, ориентированные различным образом. В этом случае действие проводящей плоскости эквивалентно появлению отраженных диполей с моментом p' в свободном пространстве (рис. 5.19).

Аналогично, хотя и несколько сложнее, выглядит метод зеркальных изображений в случае зарядов над границей диэлектриков (рис. 5.20). Поле точечного заряда q в первой среде находится как суперпозиция первоначального поля и поля отраженного заряда (рис. 5.21б), имеющего величину

$$q' = q \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}.$$

Во второй среде поле находится, как если бы это было поле заряда

$$q'' = q \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

в основном положении (т.е. в том же, как и заряд q – рис. 5.21а).

Простая проверка показывает, что при таком построении полей удовлетворяются условия (5.32), (5.33) на границе раздела сред.

2.3. Емкость

Поскольку, как ясно из предыдущего материала, во всех точках проводника электростатическое поле имеет один и тот же потенциал, можно говорить о потенциале проводника.

Уединенным проводникам, имеющим разные размеры и форму, для получения одного и того же потенциала надо сообщить разные заряды. Ввиду линейности уравнений электростатики (при линейности среды) заряд q и потенциал φ для конкретно уединенного проводника прямо пропорциональны.

Поэтому в каждом конкретном случае можно ввести коэффициент:

$$C = \frac{q}{\varphi}, \quad (5.36)$$

который характеризует проводник как «накопитель заряда» – это величина заряда проводника при единичном потенциале. Величина C называется *емкостью проводника* и измеряется $[C] = \Phi$ (Фарада).

Зная из предыдущего материала, что поле и потенциал вне равномерно заряженного шара (плотность поверхностного заряда $\xi = \text{const}$) такие же, как и в случае точечного заряда, используя формулу (5.17), запишем:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R},$$

где R – радиус шара.

Подставляя это выражение в формулу (5.36), получаем:

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon_r R.$$

В случае системы проводящих тел линейную зависимость их потенциалов и зарядов можно выразить разными способами, например:

$$q_i = C_{i1}(\varphi_1 - \varphi_i) + C_{i2}(\varphi_2 - \varphi_i) + \dots + C_{ii}\varphi_i + \dots + C_{iN}(\varphi_i - \varphi_N) \quad (5.37)$$

$$i=1, 2, \dots, N.$$

Величины C_{ik} при $i \neq k$ называются *взаимными емкостями* проводников i и k в системе N тел, при $i = k$ это *собственные емкости* тел. Доказано, что $C_{ik} = C_{ki}$.

Совокупность всех взаимных и собственных емкостей образует матрицу емкостей, которая дает в известном смысле полную характеристику системы проводников. Следовательно, зная, например, все заряды, можно найти все потенциалы путем решения системы N линейных алгебраических уравнений вида (5.37).

Рассмотрим систему двух проводящих тел, одно из которых находится в полости другого (рис. 5.22).

Чтобы понять характер электростатического поля, построим замкнутую поверхность S ,

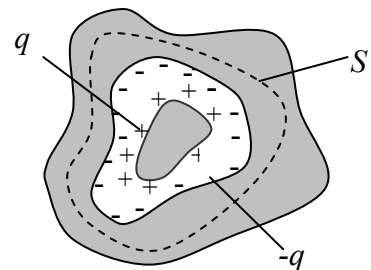


Рис. 5.22

охватывающую полость и находящуюся целиком внутри проводника. Поскольку поле на поверхности S отсутствует (как и везде внутри проводников), то поток вектора \mathbf{D} через поверхность S равен нулю, а это, в соответствии с теоремой Гаусса, $(\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = q)$ означает равенство нулю полного внутреннего заряда.

Следовательно, заряд q внутреннего проводника будет индуцировать на внутренней поверхности внешнего проводника заряд $-q$.

Отметим, что сделанный вывод никак не зависит от существования внешних полей, т.е. рассмотренная система защищена от внешних влияний. Это пример *идеального электростатического конденсатора*.

Емкостью конденсатора называют величину

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi}, \quad (5.38)$$

где q – заряд одного проводника; $\Delta\varphi$ – разность потенциалов проводников, взятая с тем же знаком, что и заряд q . Реальный конденсатор – это система двух проводников, электростатическое взаимодействие которых существенно превышает влияние внешних полей.

Рассматривая изложенный выше материал, мы попутно познакомились с явлением *электростатического экранирования* – всякая система тел, заключенная в проводящую полость, не испытывает влияния внешних полей.

2.4. Энергия электростатического поля

2.4.1. Энергия и заряд

С электрическим полем связана энергия $W^э$, распределенная в пространстве с плотностью $w^э = \mathbf{E}\mathbf{D}/2$. Следовательно, энергию электростатического поля в некоторой области V можно вычислить по формуле:

$$W^э = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E}\mathbf{D} dV = -\frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \operatorname{grad}\varphi dV. \quad (5.39)$$

Учитывая формулу векторного анализа $\mathbf{D} \operatorname{grad}\varphi = \operatorname{div}\varphi \mathbf{D} - \varphi \operatorname{div}\mathbf{D}$, и применяя *теорему Остроградского-Гаусса*, из (5.39) получим:

$$W^э = \frac{1}{2} \int_V \rho\varphi dV - \frac{1}{2} \int_S \mathbf{D}\varphi d\mathbf{S}. \quad (5.40)$$

При выводе здесь учтено уравнение $\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho$ – второе уравнение системы уравнений электростатики.

Рассмотрим некоторое распределение заряда в пространстве. Чтобы определить полную энергию $W^э$, надо выполнить интегрирование в формуле (5.40) по всему пространству.

Возьмем поверхность S объема V в виде сферы бесконечно возрастающего радиуса r (рис. 5.23).

Первый интеграл в формуле (5.40) принимает свое «полное» значение, как только сфера охватывает весь заряд (т.е. область, в которой $\rho=0$). Второй (поверхностный) интеграл в пределе исчезает.

Действительно, при увеличении r все распределение заряда проявляет себя как точечный заряд $q = \int_V \rho dV$, расположенный в центре сферы,

так как $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow r$.

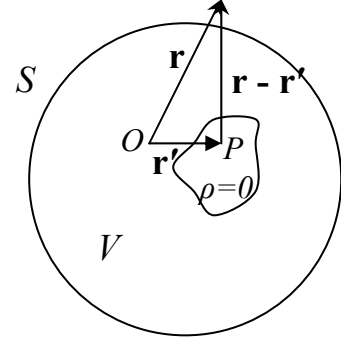


Рис. 5.23

Вычисляя φ и \mathbf{D} по формулам (5.16) и (5.17), получим:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r}, \quad \mathbf{D} = \frac{\mathbf{r}_0 q}{4\pi r^2} \quad (\mathbf{r}_{0q} \rightarrow \mathbf{r}_0).$$

Тогда под интегралом у нас будет следующее выражение:

$$\frac{\mathbf{r}_0 q^2}{(4\pi\epsilon_0\epsilon_r r)(4\pi r^2)} \mathbf{r}_0 4\pi r^2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r},$$

которое при $r \rightarrow \infty$ стремится к нулю.

Следовательно, энергия электростатического поля в свободном пространстве, связанного с ограниченным распределением заряда, оказывается равна следующему интегралу:

$$W^э = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV. \quad (5.41)$$

Мы видим, что интегрирование здесь, в сущности, производится только по области, содержащей заряд. Этим последняя формула отличается от исходной формулы (5.39). А это значит, что вместо подсчета энергии, распределенной во всем пространстве, ее можно определить через источники поля – заряды.

Рассмотрим некоторые применения полученного результата.

В случае системы N заряженных тел, внутри области V имеется ряд подобластей, вне которых $\rho=0$: $V_i, i=1, \dots, N$. Тогда формула (5.41) принимает вид:

$$W^{\text{э}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_V \rho \varphi dV.$$

Если эти тела – проводники, то в каждой подобласти $\varphi = \text{const} = \varphi_i$, и мы можем вынести потенциал φ_i за знак интеграла:

$$W^{\text{э}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \varphi_i \int_{V_i} \rho \varphi dV = \frac{1}{2} \varphi_i q_i. \quad (5.42)$$

Формула (5.42) выражает *энергию электростатического поля* системы N проводников. В случае уединенного проводника $N = 1$ и

$$W^{\text{э}} = \frac{q\varphi}{2} = C \frac{\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C}, \quad (5.43)$$

где $C = q/\varphi$ – емкость.

Вычислим энергию конденсатора ($N = 2$, $q_1 = q = -q_2$, $q > 0$). Обозначая $\varphi_1 - \varphi_2 = \Delta\varphi$, и используя формулу для емкости конденсатора (5.38), найдем:

$$W^{\text{э}} = \frac{q\Delta\varphi}{2} = C \frac{(\Delta\varphi)^2}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (5.44)$$

2.4.2. Энергия взаимодействия заряженных тел

Рассмотрим вновь формулу (5.42). Заметим, что при изменении положения заряженных тел изменятся только величины φ_i , а q_i останутся прежними в силу закона сохранения заряда.

Представим каждый потенциал в виде суммы:

$$\varphi_i = \varphi_i' + \varphi_i'',$$

где φ_i' – потенциал уединенного тела. Тогда (5.42) распадается на два слагаемых:

$$\left. \begin{aligned} W^{\text{э}} &= W^{\text{э}'} + W^{\text{э}''}, \\ W^{\text{э}'} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i', \quad W^{\text{э}''} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i'', \end{aligned} \right\} \quad (5.45)$$

$W^{\text{э}'}$ называется *собственной энергией* системы проводников, $W^{\text{э}''}$ – *взаимной энергией*, или *энергией взаимодействия* проводников. Очевидно это та энергия, которая расходуется или приобретается при соединении в систему проводящих тел с заданными зарядами, бесконечно удаленных друг от друга.

При попытке применить формулу (5.42) к системе точечных зарядов (рассматривая их, например, как проводящие шары исчезающе малого радиуса), выясняется, что эта формула теряет смысл, так как

$$\varphi_i = \frac{q_i}{(4\pi\epsilon_0\epsilon_r R_i)} \xrightarrow{R_i \rightarrow 0} \infty.$$

В представлении же (5.45), второй член, $W^{\text{э}''}$, сохраняет свой смысл. Эта ситуация показывает несовершенство наших представлений об идеальном точечном заряде.

Пусть имеется некоторое электростатическое поле $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$, причем $\varphi = 0$ в бесконечно удаленных точках. Работа, совершаемая при удалении из поля точечного $W^{\text{э}''}$ заряда q , равна $q\varphi$ [см. формулу (5.9)]. А это не что иное, как энергия взаимодействия заряда с полем [см. формулу (5.42)].

В случае системы зарядов, энергия их взаимодействия с полем \mathbf{E} определяется как сумма:

$$W_{\mathbf{E}}^{\text{э}''} = \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i. \quad (5.46)$$

Определим энергию взаимодействия поля \mathbf{E} с диполем, имеющим момент \mathbf{p} . Положим в формуле (5.46) $N=2$, $q_1 = -q = -q_2$. Тогда

$$W_{\mathbf{E}}^{\text{э}''} = q(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Однако в случае диполя $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial l} l = \mathbf{l}_{\text{grad}_l \varphi}$, тогда

$$W_{\mathbf{E}}^{\text{э}''} = q \mathbf{l}_{\text{grad}_l \varphi},$$

откуда, используя формулы $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$, $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$, окончательно получим:

$$W_{\mathbf{E}}^{\text{э}''} = -\mathbf{p}\mathbf{E}. \quad (5.47)$$

3. Стационарное магнитное поле

3.1. Вводные замечания

В случае стационарного магнитного поля $\partial/\partial t = 0$. В результате, основной системой уравнений будет являться система, составляющая правый столбец формул (5.0), приведенных во вводной части главы 5:

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \\ \mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}, \end{array} \right\}, \text{ интегральные аналоги: } \left. \begin{array}{l} \oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = I, \\ \int_S \mathbf{B} d\mathbf{s} = 0. \end{array} \right\} \quad (5.48)$$

Уравнения (5.48) не являются полностью самостоятельными, так как связаны через соотношение:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}.$$

Однако при заданных $\mathbf{j} = \text{const}$ эти уравнения позволяют находить сопутствующие токам магнитные поля.

Допустим, что распределение тока достаточно гладкое (компоненты \mathbf{j} дифференцируемы), тогда из уравнения Максвелла (5.48-1) получим:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{j} \quad (5.49)$$

или, при однородности среды ($\mu_r = \text{const}$)

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{H} - \nabla^2 \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{j} \Rightarrow \nabla^2 \mathbf{H} = -\operatorname{rot} \mathbf{j} \quad (5.50)$$

(так как $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$).

Это *векторное уравнение Пуассона* и на основании известных в математической физике соотношений (которые уже нами использовались для уравнения Пуассона в электростатике), мы можем сразу записать его решение в виде:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\operatorname{rot}' \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'|} dv' \quad (5.51)$$

(в случае свободного пространства – нет влияния, каких бы то ни было границ – и локального распределения тока).

Непосредственное применение формулы (5.51) затруднительно, так как надо вычислять $\operatorname{rot} \mathbf{j}$. Однако из (5.51) можно получить² более простое выражение:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{[\mathbf{j}(\mathbf{r}'), \mathbf{r}_{oq}]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} dv', \quad (5.52)$$

где \mathbf{r}_{oq} было нами определено выше [см. формулу (5.16)]:

² см., например, учебник В.В. Никольского [1].

$$\mathbf{r}_{0q} = \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

(единичный вектор, соответствующий направлению $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$).

Частным случаем уравнений (5.48), когда в каждой точке рассматриваемой области $\mathbf{j} = 0$ и ни один замкнутый контур L не охватывает тока, является *магнитостатика*.

3.2. Магнитостатика

В этом случае правые части в уравнениях (5.48-1) равны нулю и уравнения будут такими же по форме, как и в случае электростатических полей. Они называются *системой уравнений магнитостатики*. Эта система замкнута – магнитостатическое поле, как и поле электростатическое, энергетически изолировано.

Как и в электростатике, здесь можно ввести понятие потенциала, которое теперь будет называться магнитостатическим потенциалом:

$$\mathbf{H} = -\text{grad}\psi. \quad (5.53)$$

Из уравнений Максвелла (5.48-2), (5.48-3) следует, что потенциал ψ удовлетворяет уравнению:

$$\text{div}\mu_r \text{grad}\psi = 0, \quad (5.54)$$

которое, в случае однородной среды ($\mu_r = \text{const}$), переходит в *уравнение Лапласа*:

$$\nabla^2\psi = 0. \quad (5.55)$$

Уравнение Пуассона (5.50) в магнитостатике также переходит в уравнение Лапласа для поля \mathbf{H} :

$$\nabla^2\mathbf{H} = 0. \quad (5.56)$$

Если исходить из того, что и уравнения магнитостатики, и граничные условия для \mathbf{H} , \mathbf{B} и ψ формально идентичны тем, что мы рассматривали в электростатике, а среды, подобные проводникам, в магнитостатике отсутствуют, напрашивается вывод, что круг явлений в магнитостатике значительно беднее.

При этом решения магнитостатических задач получаются из электростатических путем формальной замены

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}, \quad \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{B}, \quad \varphi \rightarrow \psi. \quad (5.57)$$

Надо, однако, учесть, что в магнитостатике нередко рассматриваются *ферромагнетики*, а их описание весьма сложно из-за их нелинейности, влияния «предыстории» процесса (не мгновенная релаксация), а также явления *самопроизвольной намагниченности*.

Отметим, что среды с *самопроизвольной электрической поляризацией* менее распространены. Существуют, например, *электреты* – вещества, поляризуемые в расплавленном состоянии и сохраняющие длительное время состояние поляризации при отсутствии внешнего поля. Ферромагнетикам можно сопоставить *сегнетоэлектрики*; формально, процессы поляризации этих сред имеют общие черты. Намагниченные же ферромагнетики (постоянные магниты) имеют очень большое техническое значение.

При рассмотрении среды с самопроизвольной намагниченностью материальное уравнение (5.48-3) заменяется следующим:

$$\mathbf{B} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M}^0, \quad (5.58)$$

где \mathbf{M}^0 не зависит от \mathbf{H} .

Используя (5.53), вместо (5.54) получим:

$$\mu_0 \operatorname{div} \mu_r \operatorname{grad} \psi = \operatorname{div} \mathbf{M}^0, \quad (5.59)$$

откуда, при $\mu_r = \operatorname{const}$ следует *уравнение Пуассона*:

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \operatorname{div} \mathbf{M}^0 \quad (5.60)$$

(при этом предполагается, что правая часть известна). Тогда, по аналогии с электростатикой, можно получить его решение:

$$\psi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\mu_0\mu_r} \int_V \frac{\operatorname{div} \mathbf{M}^0(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'. \quad (5.61)$$

Рассмотрим теперь подробнее понятие скалярного потенциала и введем векторный потенциал.

3.3. Скалярный и векторный потенциалы

Вернемся к случаю магнитного поля при наличии постоянного тока. Во всех точках, где $\mathbf{j} = 0$, согласно уравнению Максвелла (5.48-1)

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$$

и, следовательно, справедливо определение потенциала (5.53).

Однако свойства потенциала ψ нуждаются в уточнениях. Итак, пусть имеется контур постоянного тока (рис. 5.24). Как и в случае электростатики, легко при этом получить формулу

$$\psi_1 - \psi_2 = \int_{M_1}^{M_2} \mathbf{H} d\mathbf{l}. \quad (5.62)$$

Однако величина $\Delta\psi = \psi_1 - \psi_2$, в отличие от разности потенциалов в электростатике, будет существенно зависеть от пути интегрирования.

Действительно, применим интегральное уравнение Максвелла (5.48-1) к контуру $M_1mM_2nM_1$:

$$\int_{M_1mM_2} \mathbf{H} d\mathbf{l} + I = \int_{M_2nM_1} \mathbf{H} d\mathbf{l}.$$

Это значит, что интегрирование по M_1nM_2 вместо M_2nM_1 изменит полученный результат на величину тока I :

$$\Delta\psi_{M_1nM_2} = \Delta\psi_{M_1mM_2} - I. \quad (5.63a)$$

Если же при интегрировании производится k -кратный обход тока (рис. 5.25), то во столько же раз увеличится различие:

$$\Delta\psi_{M_1pM_2} = \Delta\psi_{M_1mM_2} - kI, \quad (5.63б)$$

причем знак k зависит от направления обхода тока: $k > 0$, если обход $M_1mM_2pM_1$ и ток I образуют правовинтовую систему.

Таким образом, потенциал ψ , являясь однозначным в магнитостатических задачах, в общем случае неоднозначен.

Вернемся теперь к определению магнитного поля по заданному (постоянному) току.

В принципе, эта задача решается в соответствии с равенством (5.52). Однако издавна существует и другой подход, при помощи которого поле определяется в два приема:

- сначала находится вспомогательная функция \mathbf{A} , называемая *векторным потенциалом*, а затем
- определяется магнитная индукция \mathbf{B} по формуле:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (5.64)$$

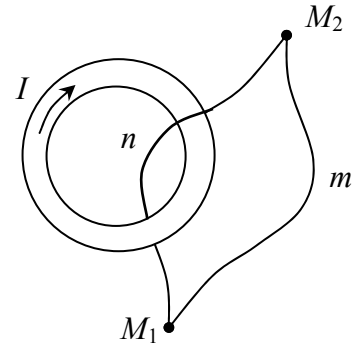


Рис. 5.24

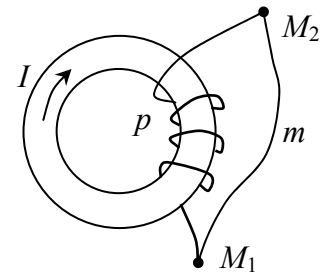


Рис. 5.25

Получим уравнение, которому удовлетворяет векторный потенциал \mathbf{A} . Заменим в (5.64) $\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$ и внесем выражение для \mathbf{H} в уравнение Максвелла (5.48-1):

$$\operatorname{rot} \mu_r^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}.$$

Для однородной ($\mu = \text{const}$) и изотропной среды имеем:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mu_0 \mu_r \mathbf{j}.$$

Если, при этом, наложить на вектор \mathbf{A} условие $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ (так называемая «кулоновская калибровка») то, используя формулу векторного анализа, придем к векторному уравнению Пуассона:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mu_r \mathbf{j}. \quad (5.65)$$

Его решение в случае бесконечного пространства и ограниченной области тока имеет вид:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'. \quad (5.66)$$

Таким образом, зная ток, можно сначала определить векторный потенциал \mathbf{A} по формуле (5.66), а затем найти поле, используя (5.64).

Основные свойства векторного потенциала заключаются в следующем:

1. Как видно из (5.64), векторный потенциал \mathbf{A} определен лишь с точностью до слагаемого вида $|\operatorname{grad} u|$ (где u – любая, достаточно гладкая, функция), замена $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \operatorname{grad} u$, в формуле (5.64) не изменяет поля.

2. Построим циркуляцию вектора \mathbf{A} по некоторому контуру L :

$$\oint_L \mathbf{A} d\mathbf{l} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{A} d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{s} = \Phi. \quad (5.67)$$

В итоге мы получили магнитный поток Φ через поверхность S , опирающуюся на L .

3.4. Простейшие стационарные магнитные поля

Линейным током будем называть ток, текущий по проводу постоянного сечения, при условии, что его длина и расстояние до точки наблюдения много больше диаметра поперечного сечения.

В этом случае формулы (5.52) и (5.66) примут вид:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi} \int_L \frac{[\mathbf{dl}', \mathbf{r}_{0q}]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}, \quad (5.68)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \mu_r I}{4\pi} \int_L \frac{\mathbf{dl}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (5.69)$$

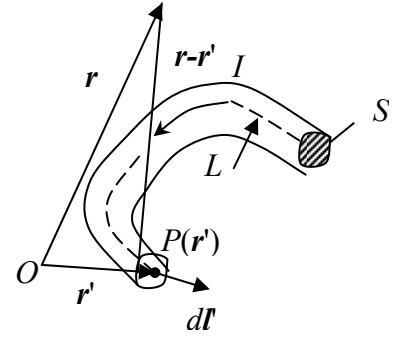


Рис. 5.26

Действительно, расстояние $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ можно считать постоянным в процессе интегрирования по поперечному сечению провода S (см. рис. 5.26); плотность тока \mathbf{j} есть $j\boldsymbol{\tau}_0$, $j = \text{const}$, $I = jS$.

Отметим, что формулы (5.68), (5.69) можно также получить путем простой подстановки в (5.52) и (5.66) выражения \mathbf{j} через дельта-функцию:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\tau}_0 I \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Уравнение (5.68) выражает так называемый *закон Био-Савара*. Соответственно, уравнение (5.52) можно рассматривать как *обобщенный закон Био-Савара*.

Другой простой случай стационарного магнитного поля – *поле магнитного диполя*, которым является контур (или виток) тока (петля с током). Поле такого магнитного диполя предлагается рассмотреть самостоятельно.

Перейдем теперь к рассмотрению энергии стационарного магнитного поля.

3.5. Энергия стационарного магнитного поля

3.5.1. Энергия и ток

С магнитным полем связана энергия W^M , распределенная в пространстве с плотностью $w^M = \mathbf{H}\mathbf{B}/2$ (это определение рассмотрено в разд. 6, гл. 4).

Таким образом, энергию стационарного магнитного поля в некоторой области V можно вычислить по формуле:

$$W^M = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H}\mathbf{B} dv = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \text{rot } \mathbf{A} dv. \quad (5.70)$$

Согласно формуле векторного анализа

$$\mathbf{H} \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{A} \text{rot } \mathbf{H} + \text{div}[\mathbf{A}, \mathbf{H}].$$

Тогда

$$W^M = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{j} \mathbf{A} dv + \frac{1}{2} \oint_S [\mathbf{A}, \mathbf{H}] ds. \quad (5.71)$$

Здесь учтено уравнение Максвелла (5.48-1) и использована *теорема Остроградского–Гаусса*.

Чтобы определить полную энергию поля, надо распространить интегрирование на все пространство. Однако здесь, как и в случае электростатического поля, поверхностный интеграл при $r \rightarrow \infty$ тоже уничтожается, так как \mathbf{H} и \mathbf{A} убывают с расстоянием, как $1/r^3$ и $1/r^2$ соответственно, а поверхность S растет, как r^2 .

Энергия стационарного магнитного поля, связанная с ограниченным в пространстве распределением тока, выражается, поэтому, формулой

$$W^M = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{j} \mathbf{A} dv. \quad (5.72)$$

Интегрирование здесь производится фактически только по области, где есть ток.

Таким образом, при помощи (5.72) энергия находится через источники поля, а не путем учета ее распределения в пространстве, как следует из формулы (5.70).

Согласно (5.72) магнитная энергия равна нулю, если во всем пространстве отсутствуют токи.

Рассмотрим теперь понятие *индуктивности*.

3.5.2. Индуктивность



Рис. 5.27

Рассмотрим область «*типа цепи*» (рис. 5.27), когда можно говорить о полном стационарном токе I . Выразим векторный потенциал \mathbf{A} в (5.72) из формулы (5.66):

$$W^M = \frac{\mu_0 \mu_r}{8\pi} \int_V \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}) \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv dv'. \quad (5.73)$$

Перепишем эту формулу в следующем виде:

$$W^M = \frac{1}{2} LI^2, \quad (5.74)$$

где коэффициент

$$L = \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi I^2} \int_V \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}) \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv dv' \quad (5.75)$$

называется *индуктивностью* и имеет размерность $[L] = \text{Гн}$ (Генри).

Пусть теперь мы имеем систему областей V_i ($i = 1, 2, \dots, N$) с полными токами I_i .

Векторный потенциал в (5.72) представим как $\sum_{k=1}^N \mathbf{A}_k$, где \mathbf{A}_k есть векторный потенциал, создаваемый k -м током. Тогда:

$$W^M = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{V_i} \mathbf{j} \mathbf{A} dv = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \int_{V_i} \mathbf{j} \mathbf{A}_k dv. \quad (5.76)$$

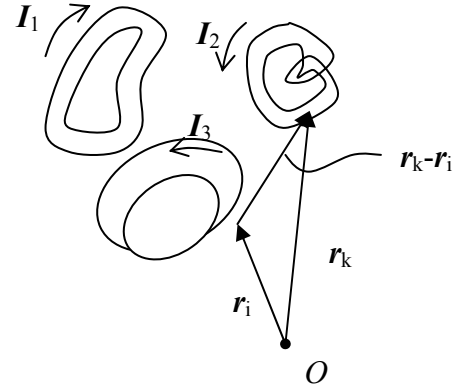


Рис. 5.28

Слагаемые можно преобразовать, пользуясь формулой (5.66):

$$W_{ik}^M = \frac{1}{2} \int_{V_i} \mathbf{j} \mathbf{A}_k dv = \frac{\mu_0 \mu_r}{8\pi} \int_{V_i} \int_{V_k} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_i) \mathbf{j}(\mathbf{r}_k)}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i|} dv_i dv_k \quad (5.77)$$

или

$$W_{ii}^M = \frac{L_i I_i^2}{2}, \quad W_{ik}^M = \frac{M_{ik} I_i I_k}{2} \quad (i \neq k)$$

$$\left. \begin{aligned} L_i &= \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi I_i^2} \int_{V_i} \int_{V_i} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}) \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv dv', \\ M_{ik} &= \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi I_i I_k} \int_{V_i} \int_{V_k} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_i) \mathbf{j}(\mathbf{r}_k)}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i|} dv_i dv_k. \end{aligned} \right\} \quad (5.78)$$

Введенные формулами (5.78) коэффициенты L_i и M_{ik} называются *собственными* и *взаимными индуктивностями* соответственно.

Формулу для энергии (5.77) можно теперь переписать в более простом виде:

$$W^M = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N L_i I_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N M_{ik} I_i I_k, \quad (5.79)$$

где первое слагаемое представляет собой *собственную энергию системы токов*, а второе – *взаимную энергию*.

Рассмотрим еще раз слагаемые W_{ik}^M , задаваемые формулой (5.77). Если токи линейные, то

$$W_{ik}^M = \frac{1}{2} \int_{V_i} \mathbf{j} \mathbf{A}_k dv = \frac{I_i}{2} \oint_{L_i} \mathbf{A}_k d\mathbf{l} = \frac{I_i}{2} \int_{S_i} \mathbf{B}_k d\mathbf{s} = \frac{I_i \Phi_{ik}}{2}, \quad (5.80)$$

где Φ_{ik} – магнитный поток, создаваемый k -м током и проходящий через i -й контур.

Сопоставляя (5.80) и (5.78), получим

$$\Phi_{ik} = M_{ik} I_k. \quad (5.81)$$

Аналогичные соотношения, включающие собственную индуктивность,

$$W_{ii}^M = I_i \Phi_{ii} / 2, \quad \Phi_{ii} = L_i I_i \quad (5.82)$$

также нередко используются для реальных объектов, хотя получить их таким же путем, как (5.80), (5.81), нельзя³.

4. Квазистационарные токи и поля

4.1. Условия квазистационарности

При решении многих электродинамических задач полезным оказывается так называемое *приближение квазистационарного поля*. Его применяют при

- анализе цепей переменного тока (линейных),
- расчете длинных линий,
- в магнитной гидродинамике и
- других областях.

Чаще всего это приближение эффективно, когда характерные частоты изменения токов и полей малы, следовательно, длина λ электромагнитных волн, которые могут излучаться системой, много больше ее линейных размеров:

$$\lambda \gg l. \quad (5.83)$$

Иначе, если ввести характерное время T изменения полей, то предполагается

$$l \ll cT. \quad (5.84)$$

Неравенства (5.83) и (5.84) представляют собой *достаточные условия квазистационарности*. Электромагнитное поле в этом случае напоминает по

³ см. учебник В.В. Никольского [1], с. 99.

структуре поле *вибратора Герца* в ближней зоне и называется *квазистационарным*.

Уравнения для полей \mathbf{E} и \mathbf{H} в квазистационарном приближении оказываются более простыми, что позволяет эффективно использовать их для решения широкого круга задач.

Исторически квазистационарные поля были исследованы позже, чем статические и стационарные поля. Они стали представлять интерес с развитием электротехники переменного тока, а затем и радиотехники.

Предположим, что найдено поле $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ заданной системы постоянных токов. Можно представить себе столь медленное изменение этих токов, что оно почти не затронет строения пространственного распределения поля. Тогда поле в каждый момент времени t можно рассматривать как стационарное и созданное существующими в этот же момент токами. Это значит, что при изменении токов по закону $f(t)$ будем иметь:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \sim f(t)\mathbf{E}(\mathbf{r}),$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \sim f(t)\mathbf{H}(\mathbf{r}),$$

где $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ – прежние векторные функции.

4.2. Уравнения Максвелла

Предположение о медленности процессов говорит о том, что всякое изменение поля в какой-либо части системы практически мгновенно передается в любую ее точку, т.е. фаза изменения поля системы во всех точках практически одинакова. Следовательно, можно пренебречь запаздыванием, и потенциалы φ и \mathbf{A} можно записать в виде

$$\begin{aligned} \varphi(t, \mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \int_V \frac{\rho(t, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv', \\ \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) &= \frac{\mu_0\mu_r}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(t, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \end{aligned} \quad (5.85)$$

[ср. последнюю формулу с формулой (5.66)]. Это теперь уже *электродинамические потенциалы*. Отсюда следует, что они являются решениями уравнений:

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0\epsilon_r}, \quad \Delta\mathbf{A} = -\mu_0\mu_r\mathbf{j},$$

которые не отличаются от стационарных. Особенность же в том, что t все же входит в них как параметр – через источники ρ и \mathbf{j} . Поэтому при вычислении

полей \mathbf{E} и \mathbf{B} воспользуемся их обычным определением:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (5.86)$$

которое учитывает вихревой характер поля \mathbf{E} .

Уравнения Максвелла тогда принимают вид:

$$\begin{cases} \text{div } \mathbf{D} = \rho & (\varepsilon_0 \text{div} (\varepsilon_r \nabla \varphi) = -\rho), \\ \text{rot rot } \mathbf{A} = -\mu_0 \mu_r \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \varphi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) \frac{\mu_r \varepsilon_r}{c^2}, \end{cases} \quad (5.87)$$

$$c^2 = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1}.$$

Здесь мы использовали *кулоновскую калибровку*

$$|\text{div } \mathbf{A}| = 0.$$

Если в области с линейным размером l рассматривать решения этих уравнений, существенно изменяющиеся за некоторое время T , то при выполнении условия (5.84) в среднем по области будем иметь:

$$|\text{rot rot } \mathbf{A}| \gg \left| \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \right| \quad (5.88)$$

(порядок левой части $-A/l^2$, правой $-A/c^2 T^2$).

Условие, когда $\frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div } \mathbf{A} = 0$ называется *лоренцевской калибровкой*

(более подробно будет рассмотрено в случае нестационарных полей).

С учетом неравенства (5.88) уравнения Максвелла для квазистационарных процессов можно записать в виде

$$\begin{aligned} \text{I} \quad \text{rot } \mathbf{B} &= \mu_0 \mu_r \mathbf{j} - \frac{\mu_r \varepsilon_r}{c} \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t}, & \text{div} (\varepsilon_r \nabla \varphi) &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0}; \\ \text{II} \quad \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \text{div } \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (5.89)$$

Эти уравнения отличаются от полных уравнений Максвелла тем, что в первой группе уравнений сделано пренебрежение вихревой частью \mathbf{E} по сравнению с потенциальной:

$$|\nabla\varphi| \gg \left| \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right|. \quad (5.90)$$

Неравенство (5.90) можно считать определяющим *условием квазистационарности* вместо (5.84). Оно предпочтительнее, так как, например, для длинных линий условие (5.84) нарушено, хотя уравнения (5.89) выполняются, поскольку выполнено условие (5.90).

Уравнения (5.89) можно еще более упростить для хороших проводников, если предположить

$$\sigma T \gg \varepsilon. \quad (5.91)$$

Поскольку согласно закону Ома $\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стоп}})$, то (5.91) сводится к предположению, что плотность тока смещения мала по сравнению с плотностью тока проводимости:

$$\left| \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right| \ll |\mathbf{j}|. \quad (5.92)$$

Тогда в первом уравнении (5.89) исчезнет второй член в правой части.

Видно, что в этом случае индукция \mathbf{B} подчиняется уравнениям магнито-статике (для вычислений можно пользоваться результатами магнито-статике), однако надо учитывать, что поле \mathbf{E} не является безвихревым.

Одной из особенностей теории квазистационарных явлений является использование уравнений Максвелла в интегральной форме вместе с системой понятий, происходящих из электростатики и теории стационарного магнитного поля.

Пусть, например, имеется система переменных токов I_i , $\overline{L_i}$ которые принимаются за линейные, в соответствующих контурах L_i ($i = 1, N$). Пользуясь уравнениями (5.81), (5.82) (раздел 3 настоящей главы), выразим полный магнитный поток Φ_i , проходящий через контур L_i :

$$\Phi_i = \sum_{k=1}^N \Phi_{ik} = L_i I_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N M_{ik} I_k$$

(напомним, что L_i и M_{ik} представляют собой, соответственно, собственные и взаимные индуктивности соответствующих контуров).

Применяя второе уравнение Максвелла в форме $\mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$, запишем:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_i}{dt} = -L_i \frac{dI_i}{dt} - \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^N M_{ik} \frac{dI_k}{dt}. \quad (5.93)$$

Таким образом, мы получили в рамках теории квазистационарных процессов выражение наводимой э.д.с. через индуктивности и производные токов.

Понятия электростатики применяются в нашем случае на том основании, что квазистационарное электрическое поле, будучи по структуре близким к электростатическому, может считаться потенциальным. Поэтому здесь, как и в электростатике, фигурируют разности потенциалов («напряжения») и емкости (которые вычисляются по формулам электростатики).

4.3. Энергия квазистационарного поля и цепь переменного тока

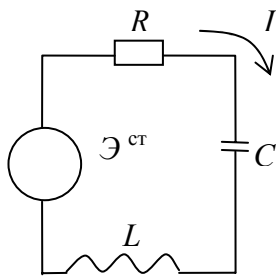


Рис. 5.29

Проследим, каким образом и из каких общих представлений электродинамики возникает *теория цепи переменного тока*.

С этой целью рассмотрим баланс энергии электромагнитного поля в системе, которую можно описать как цепь переменного тока (см. рис. 5.29). Это – последовательное соединение резистивного, емкостного и индуктивного элементов, а также генератора.

Условие квазистационарности будем считать выполненным: временные изменения настолько медленны, что строение электрических и магнитных полей удовлетворительно описывается уравнениями электростатики и стационарного магнитного поля. Тогда можно воспользоваться и соответствующими выражениями для энергий:

$$W^э = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \epsilon_r \mathbf{E}^2 dv = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}, \quad (5.94)$$

$$W^м = \frac{\mu_0}{2} \int_V \mu_r \mathbf{H}^2 dv = \frac{1}{2} LI^2. \quad (5.95)$$

Однако входящие сюда параметры C и L только тогда примут смысл емкости и индуктивности элементов цепи, если один из предполагаемых реактивных элементов электродинамической цепи (системы) действительно концентрирует в себе практически всю электрическую энергию, а другой – магнитную.

Запишем далее *мощность потерь*:

$$P_{\Pi} = \int_V \sigma^{-1} \mathbf{j}^2 dv = I^2 R \quad (5.96)$$

и *мощность сторонних сил*:

$$P^{\text{CT}} = - \int_V \mathbf{j} \mathbf{E}^{\text{CT}} dv = -I \mathcal{E}^{\text{CT}}. \quad (5.97)$$

При этом соотношения

$$R = \frac{1}{I^2} \int_V \sigma^{-1} \mathbf{j}^2 dv \quad \text{и} \quad \mathcal{E}^{\text{CT}} = \frac{1}{I} \int_V \mathbf{j} \mathbf{E}^{\text{CT}} dv$$

следует рассматривать в качестве определений *активного сопротивления* R и *э.д.с. генератора* \mathcal{E}^{CT} .

Следующий этап – наложение *принципа цепи*, т.е. условия, что величина I в (5.95)-(5.97) есть один и тот же ток цепи $I = \frac{dq}{dt}$, причем q – заряд, фигурирующий в (5.94). Сюда входит требование полного перехода тока проводимости в ток смещения последовательно включенного емкостного элемента.

Привлечем теперь *уравнение баланса энергии*:

$$P_{\Sigma} + \frac{dW}{dt} + P = 0, \quad (5.98)$$

где

$$P_{\Sigma} = \oint_S [\mathbf{E}, \mathbf{H}] ds = \oint_S \mathbf{\Pi} ds,$$

$\mathbf{\Pi}$ – вектор Пойнтинга, W – запас энергии в объеме V , ограниченном поверхностью S , $P = P_{\Pi} + P^{\text{CT}}$ – полная мощность.

Будем полагать, что исследуемая электродинамическая система целиком находится внутри поверхности S . Пренебрежем излучением, тогда полный поток вектора $\mathbf{\Pi}$ через S равен нулю:

$$P_{\Sigma} = \oint_S \mathbf{\Pi} ds = 0.$$

Подставим выражения $W = W^{\text{M}} + W^{\text{Э}}$ и $P = P_{\Pi} + P^{\text{CT}}$ в (5.98):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C} \right) + I^2 R = I \mathcal{E}^{\text{CT}}. \quad (5.99)$$

Продифференцируем и поделим на I (учитывая, что $I = dq/dt$):

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{C} = \mathcal{E}^{\text{CT}}.$$

Второе дифференцирование дает:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \frac{d\mathcal{E}^{\text{CT}}}{dt}. \quad (5.100)$$

Уравнение (5.100) – это известное *уравнение цепи переменного тока* с индуктивностью, емкостью, резистивным элементом и генератором.

5. Электромагнитное поле, гармоническое во времени

5.1. Основные уравнения электродинамики

5.1.1. Система уравнений Максвелла и уравнения второго порядка

Теперь главным предметом нашего внимания будут изменяющиеся во времени электромагнитные поля, анализ которых не допускает какого-либо упрощения при формировании основных положений теории.

Уравнения Максвелла имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}, & \text{div } \mathbf{D} &= \rho, & \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}, \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \text{div } \mathbf{B} &= 0, & \mathbf{B} &= \mu_0 \mu_r \mathbf{H}, \\ \mathbf{j} &= \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}^{\text{CT}}. \end{aligned} \quad (5.101)$$

Как известно, эта система уравнений выражает общие законы электромагнетизма, универсальными не являются лишь материальные уравнения, но всегда открыта возможность их замены более общими или специальными соотношениями.

Вместе с системой *граничных условий*

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \mathbf{v}_0 &= \xi, & (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \mathbf{v}_0 &= 0, \\ [\mathbf{v}_0, \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2] &= 0, & [\mathbf{v}_0, \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2] &= \eta, \end{aligned} \quad (5.102)$$

где ξ – плотность поверхностного заряда, \mathbf{v}_0 – единичный вектор нормали к поверхности раздела сред, η – плотность поверхностного тока; и заданием *источников* (последнее уравнение Максвелла) уравнения Максвелла представляют собой аппарат решения задач электродинамики.

Интегральные аналоги уравнений Максвелла играют в электродинамике гораздо меньшую роль, так как они не дают математической формулировки задачи о поле.

Из системы уравнений Максвелла можно исключить все неизвестные величины, кроме напряженностей поля.

Заменим индукции через напряженности (через материальные уравнения) и применим операцию rot к основным уравнениям:

$$\text{rot}(\varepsilon_r^{-1} \text{rot } \mathbf{H}) = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{E} + \text{rot } \varepsilon_r^{-1} \mathbf{j},$$

$$\text{rot}(\mu_r^{-1} \text{rot } \mathbf{E}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{H}.$$

Заменим теперь в правой части уравнений соответственно $\text{rot } \mathbf{E}$ и $\text{rot } \mathbf{H}$ из основных уравнений, учитывая, что $c^2 = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1}$:

$$\text{rot}(\varepsilon_r^{-1} \text{rot } \mathbf{H}) + \frac{\mu_r}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \text{rot } \varepsilon_r^{-1} \mathbf{j}, \quad (5.103)$$

$$\text{rot}(\mu_r^{-1} \text{rot } \mathbf{E}) + \frac{\varepsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}. \quad (5.104)$$

Чаще встречаются формы этих уравнений для *однородной* и *изотропной* среды. Тогда:

$$\varepsilon_r^{-1}, \mu_r^{-1} = \text{const}.$$

Далее используем формулу векторного анализа:

$$\text{rot rot } \mathbf{F} = \text{grad div } \mathbf{F} - \nabla^2 \mathbf{F}.$$

Учитывая, что в данном случае

$$\text{div } \mathbf{H} = 0, \quad \text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon_r},$$

получим:

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{\varepsilon_r \mu_r}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\text{rot } \mathbf{j}, \quad (5.105)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\varepsilon_r \mu_r}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \text{grad } \rho + \mu_0 \mu_r \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}. \quad (5.106)$$

Правые части этих уравнений, вообще говоря, не известны:

– в выражение для \mathbf{j} входит \mathbf{E} ;

– при отсутствии электропроводности ($\sigma = 0$), $\mathbf{j} = \mathbf{j}^{\text{CT}}$ – задается при решении задачи.

В этом случае (5.105), (5.106) обычно называют *векторными уравнениями Даламбера*. Легко видеть, что при стационарности процесса эти уравнения переходят в *уравнения Пуассона* для стационарных электрических и магнитных полей.

Заметим также, что уравнения Пуассона возникают из уравнений Максвелла не только при $\partial/\partial t = 0$, но и в случае пренебрежения током смещения $\partial\mathbf{D}/\partial t = 0$.

При отсутствии токов и зарядов оба уравнения становятся однородными, при этом они называются *волновыми уравнениями*.

В электродинамике, как и при рассмотрении стационарных полей, используются вспомогательные величины – электродинамические потенциалы.

Векторный потенциал вводится, как и в теории стационарного магнитного поля:

$$\mathbf{H} = (\mu_0\mu_r)^{-1} \text{rot } \mathbf{A}. \quad (5.107)$$

Подстановка во второе уравнение Максвелла ($\text{rot } \mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$) дает:

$$\text{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Функция в круглых скобках является потенциальной, приравнивая ее градиенту потенциала $-\nabla\varphi$, запишем:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}. \quad (5.108)$$

Если теперь ввести (5.107) и (5.108) в первое уравнение Максвелла, то при однородности и изотропии среды с учетом формулы векторного анализа для rotrot , будем иметь:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{\varepsilon_r\mu_r}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \text{grad} \left(\frac{\varepsilon_r\mu_r}{c^2} \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \text{div } \mathbf{A} \right) - \mu_0\mu_r \mathbf{j}. \quad (5.109)$$

На электродинамические потенциалы накладывается дополнительное условие:

$$\frac{\varepsilon_r\mu_r}{c^2} \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \text{div } \mathbf{A} = 0 \quad (5.110)$$

(*лоренцева калибровка*). Тогда (5.109) принимает вид:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{\varepsilon_r\mu_r}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\mu_r \mathbf{j}. \quad (5.111)$$

Подставляя теперь (5.108) в уравнение Максвелла $\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$ и используя (5.110), получим:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{\varepsilon_r \mu_r}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}. \quad (5.112)$$

Уравнения (5.111) и (5.112) называются соответственно *векторным* и *скалярным уравнениями Даламбера*.

Лоренцева калибровка, помимо упрощения уравнений, удобна еще и тем, что эти уравнения становятся одинаковыми по форме.

Таким образом, напряженности поля \mathbf{E} и \mathbf{H} могут быть найдены, если предварительно определены электродинамические потенциалы \mathbf{A} и φ , как решения уравнений Даламбера.

5.1.2. Гармонические колебания и уравнения электродинамики в комплексной форме

Среди возможных временных колебаний электромагнитного поля особый интерес представляют гармонические колебания. Это обусловлено не только практическим интересом (электро- и радиотехника), но и тем, что иные временные зависимости можно разлагать по гармоническим колебаниям, представляя их в виде рядов и интегралов Фурье.

В общем случае, каждая из компонент \mathbf{E} и \mathbf{H} характеризуется не только некоторой амплитудой, но и фазой (синфазность – частный случай), поэтому вектора в общем случае выражаются в форме:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{x}_0 F_{mx} \cos(\omega t + \varphi_x) + \mathbf{y}_0 F_{my} \cos(\omega t + \varphi_y) + \mathbf{z}_0 F_{mz} \cos(\omega t + \varphi_z), \quad (*)$$

где $F_{mx} = F_{mx}(\mathbf{r})$, $\varphi_x = \varphi_x(\mathbf{r})$ и т.д. – амплитуды и фазы компонент некоторого вектора \mathbf{F} .

А). Единственным средством описания компонент поля является *метод комплексных амплитуд* (известный из электро- и радиотехники).

Заменяя в уравнениях электродинамики все величины их комплексными представлениями

$$\mathbf{E} \rightarrow \dot{\mathbf{E}}_m e^{i\omega t}, \quad \mathbf{H} \rightarrow \dot{\mathbf{H}}_m e^{i\omega t}$$

и т.д., легко убедиться, что это позволяет вместо дифференцирования по t везде ввести умножение на $i\omega$. Далее, поскольку в левых и правых частях всех равенств появится множитель $e^{i\omega t}$, то его можно опустить (сократить), тогда в уравнениях останутся комплексные амплитуды $\dot{\mathbf{E}}_m$, $\dot{\mathbf{H}}_m$ и т.д.

Кроме всего прочего, применение метода комплексных амплитуд (КА) существенно расширяет физическое содержание некоторых понятий. Это связано с возможностью рассматривать значения всех параметров уже не в

пределах вещественной оси, а на комплексной плоскости. В первую очередь, это касается проницаемостей ε_r и μ_r .

Б). Рассмотрим сначала простейшее, но практически важное *расширение смысла понятия ε_r* .

Применение метода КА приводит первое уравнение Максвелла к виду

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_m = i\omega\varepsilon_0\varepsilon_r \dot{\mathbf{E}}_m + \dot{\mathbf{j}}_m.$$

Учитывая, что $\dot{\mathbf{j}}_m = \sigma \dot{\mathbf{E}}_m + \dot{\mathbf{j}}_m^{\text{CT}}$ и вынося за скобку множитель $\dot{\mathbf{E}}_m$, имеем:

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_m = i\omega\varepsilon_0 \left(\varepsilon_r - i \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} \right) \dot{\mathbf{E}}_m + \dot{\mathbf{j}}_m^{\text{CT}}.$$

Параметр в скобках

$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon_r - i \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} \quad (5.113)$$

может рассматриваться как *диэлектрическая проницаемость*, которая при $\sigma \neq 0$ (электропроводная среда) принимает комплексные значения.

Первое уравнение Максвелла, таким образом, записывается в виде

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_m = i\omega\varepsilon_0 \dot{\varepsilon} \dot{\mathbf{E}}_m + \dot{\mathbf{j}}_m^{\text{CT}}, \quad (5.114)$$

где $\dot{\varepsilon}$ – комплексная диэлектрическая проницаемость.

В). В *интерпретации проницаемостей* можно пойти и дальше. В рамках метода КА может быть углублен смысл материальных уравнений

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0\mu_r \mathbf{H}$$

путем учета инерционности процессов поляризации и намагничивания. Если не пользоваться методом КА, то, определяя поле в идеальном диэлектрике, при $\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \cos \omega t$ будем иметь электрическую индукцию $\mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r \mathbf{E}_m \cos \omega t$.

В действительности же процесс поляризации вещества не следует за изменением поля мгновенно, и индукция испытывает запаздывание, т.е. колебания в диэлектрике отстают по фазе на некоторую величину α , так что надо писать

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r \mathbf{E}_m \cos(\omega t - \alpha).$$

Взяв комплексные амплитуды векторов \mathbf{E} и \mathbf{D} , т.е. \mathbf{E}_m и $\varepsilon_0\varepsilon_r \mathbf{E}_m e^{-i\alpha}$, видим, что они различаются на комплексный множитель

$$\varepsilon_0\varepsilon_r e^{-i\alpha} = \varepsilon_0\varepsilon_r (\cos \alpha - i \sin \alpha).$$

Этот множитель и следует принять за *абсолютную диэлектрическую проницаемость* в методе КА, учитывая инерционность поляризации диэлектрика.

Точно также описывается и *инерционность намагничивания*.

Г). Итак, имеются веские основания рассматривать проницаемости ε_r и μ_r как комплексные:

$$\varepsilon = \varepsilon' - i\varepsilon'', \quad \mu = \mu' - i\mu'' \quad (5.115)$$

(индекс r будем опускать, точки над комплексными ε и μ будем ставить только в особых случаях). Перед мнимыми частями принято ставить знак минус, тогда в наиболее типичных случаях

$$\varepsilon'' > 0, \quad \mu'' > 0,$$

что (мы это покажем в следующем разделе) имеет четкую энергетическую трактовку.

В физической, электротехнической и радиотехнической практике комплексные ε и μ (их мнимые и вещественные части) подлежат измерению.

Существуют специальные обозначения для $\varepsilon''/\varepsilon'$ и μ''/μ' :

$$\operatorname{tg}\Delta = \varepsilon''/\varepsilon', \quad \operatorname{tg}\Delta^M = \mu''/\mu', \quad (5.116)$$

Δ называется *углом электрических потерь*, Δ^M – *углом магнитных потерь*. Δ^M есть, очевидно, фаза запаздывания \mathbf{B} по отношению к \mathbf{H} в результате инерционности намагничивания, так же как $\Delta = \alpha$ – фаза запаздывания \mathbf{D} по отношению к \mathbf{E} (инерционность поляризации).

При наличии электропроводности ($\sigma \neq 0$) и инерционности поляризации надо в (5.113) заменить $\varepsilon_r \rightarrow \varepsilon_r e^{-i\alpha}$. Это дает:

$$\varepsilon' = \varepsilon_r \cos \alpha, \quad \varepsilon'' = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} + \varepsilon_r \sin \alpha.$$

Д). Пренебрегая инерционностью поляризации, из (5.113) имеем

$$\operatorname{tg}\Delta_{(\alpha=0)} = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r}, \quad (5.117)$$

т.е. тангенс угла электрических потерь есть отношение плотностей тока проводимости и смещения

$$j_m / (\partial D / \partial t)_m = \sigma / (\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r)$$

Тогда можно записать следующий критерий:

$$\operatorname{tg}\Delta_{(\alpha=0)} \begin{cases} \gg 1 & \text{– проводник,} \\ \ll 1 & \text{– диэлектрик.} \end{cases}$$

После обсуждения свойств сред и физического содержания материальных уравнений можно перейти к записи уравнений электродинамики в комплексной форме.

Е). Уравнения электродинамики в комплексной форме

С использованием метода КА система уравнений Максвелла сводится всего лишь к двум уравнениям:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_m &= i\omega \varepsilon_0 \varepsilon \dot{\mathbf{E}}_m + \dot{\mathbf{j}}_m^{\text{CT}}, \\ \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_m &= -i\omega \mu_0 \mu \dot{\mathbf{H}}_m. \end{aligned} \quad (5.118)$$

Первое из них было получено выше (п. Б), второе получается аналогично из второго уравнения Максвелла в системе (5.101).

Легко убедиться, что любое уравнение из (5.101) либо уже учтено в (5.118) (материальные уравнения), либо следует из (5.118). Например, применяя оператор div к (18.2), приходим к уравнению $\operatorname{div} \dot{\mathbf{B}}_m = 0$.

Нетрудно привести к комплексной форме и уравнения электродинамики второго порядка: достаточно сделать замену:

$$\partial / \partial t \rightarrow i\omega, \quad \partial^2 / \partial t^2 \rightarrow -\omega^2, \quad \mathbf{j} \rightarrow \dot{\mathbf{j}}^{\text{CT}},$$

а проницаемости ε_r и μ_r рассматривать как комплексные ε, μ . Тогда, вместо уравнений (5.103), (5.104), будем иметь:

$$\operatorname{rot}(\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_m) - (\omega/c)^2 \mu \dot{\mathbf{H}}_m = \operatorname{rot} \varepsilon^{-1} \dot{\mathbf{j}}_m^{\text{CT}}, \quad (5.119)$$

$$\operatorname{rot}(\mu^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_m) - (\omega/c)^2 \varepsilon \dot{\mathbf{E}}_m = -i\omega \mu \dot{\mathbf{j}}_m^{\text{CT}}. \quad (5.120)$$

Переходя теперь к векторным уравнениям Даламбера (5.105), (5.106) можно сразу же записать комплексную форму первого из них:

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}}_m + (\omega/c)^2 \varepsilon \mu \dot{\mathbf{H}}_m = -\operatorname{rot} \dot{\mathbf{j}}_m^{\text{CT}}. \quad (5.121)$$

В уравнении (5.106) требует внимания правая часть, содержащая плотность заряда ρ . Учтем, что

$$\frac{\operatorname{grad} \dot{\rho}_m}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\mathbf{E}}_m, \quad (\operatorname{div} \dot{\mathbf{D}}_m = \dot{\rho}_m),$$

а из первого уравнения (5.118) следует равенство

$$i\omega\varepsilon_0\varepsilon \operatorname{div} \dot{\mathbf{E}}_m = -\operatorname{div} \dot{\mathbf{j}}_m^{\text{ст}}.$$

Подставляя его в (5.106), найдем:

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}}_m + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon\mu \dot{\mathbf{E}}_m = \frac{i}{\omega\varepsilon_0\varepsilon} \operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\mathbf{j}}_m^{\text{ст}} + i\omega\mu_0\mu \dot{\mathbf{j}}_m^{\text{ст}}. \quad (5.122)$$

Равенства (5.121), (5.122) называются *неоднородными уравнениями Гельмгольца*. При $\dot{\mathbf{j}}_m^{\text{ст}} = 0$ они переходят в *однородные уравнения Гельмгольца*.

В заключение, запишем в комплексной форме соотношения, содержащие электродинамические потенциалы.

Исходные выражения векторов \mathbf{H} и \mathbf{E} через потенциалы (5.107) и (5.108) принимают вид:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_m &= \mu_0^{-1} \mu^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}}_m, \\ \dot{\mathbf{E}}_m &= -\operatorname{grad} \dot{\phi}_m - i\omega \dot{\mathbf{A}}_m. \end{aligned} \quad (5.123)$$

Уравнения Даламбера (5.111), (12) переходят в *неоднородные уравнения Гельмгольца*:

а) векторное

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{A}}_m + (\omega/c)^2 \varepsilon\mu \dot{\mathbf{A}}_m = -\mu_0\mu \dot{\mathbf{j}}_m^{\text{ст}}; \quad (5.124)$$

б) скалярное

$$\nabla^2 \dot{\phi}_m + (\omega/c)^2 \varepsilon\mu \dot{\phi}_m = -\frac{i}{\omega\varepsilon_0\varepsilon} \operatorname{div} \dot{\mathbf{j}}_m^{\text{ст}}. \quad (5.125)$$

При этом налагается *условие лоренцевой калибровки* в форме

$$i\frac{\omega}{c^2} \varepsilon\mu \dot{\phi}_m + \operatorname{div} \dot{\mathbf{A}}_m = 0. \quad (5.126)$$

Наконец, запишем результат исключения скалярного потенциала $\dot{\phi}_m$ из уравнений (5.123) при помощи условия (5.126):

$$\dot{\mathbf{E}}_m = -\frac{ic^2}{\omega\varepsilon\mu} \left[\operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\mathbf{A}}_m + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon\mu \dot{\mathbf{A}}_m \right]. \quad (5.127)$$

5.2. Баланс энергии при гармонических колебаниях

А). Средние энергетические характеристики

При рассмотрении гармонически колеблющихся полей особый интерес представляют их средние энергетические характеристики:

- средняя электрическая или магнитная энергия,
- средний поток энергии,
- средняя мощность и т.д.

По формулам вычисления средних величин (приложение 2) средние энергетические характеристики легко представить в форме, содержащей только комплексные амплитуды. Например, для плотностей электрической и магнитной энергии получаем следующие выражения средних:

$$\overline{w^э} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \dot{\mathbf{E}}_m \dot{\mathbf{E}}_m^*}{4}, \quad \overline{w^м} = \frac{\mu_0 \mu \dot{\mathbf{H}}_m \dot{\mathbf{H}}_m^*}{4}. \quad (5.128)$$

Здесь ε, μ – комплексные проницаемости.

Далее введем величину, которую будем называть *плотностью комплексной мощности*:

$$\dot{p} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{j}}_m^* \dot{\mathbf{E}}_m. \quad (5.129)$$

Согласно (П.2.3) (приложение 2) среднее значение плотности мощности

$$\overline{p} = \text{Re } \dot{p}. \quad (5.130)$$

Комплексным вектором Пойнтинга называют величину

$$\dot{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{E}}_m, \dot{\mathbf{H}}_m^*], \quad (5.131)$$

его вещественная часть, согласно (П.2.5) (приложение 2), дает среднее значение вектора Пойнтинга:

$$\overline{\mathbf{P}} = \text{Re } \dot{\mathbf{P}}. \quad (5.132)$$

В). Средний баланс энергии

Если рассматривать баланс энергии обычным путем (не методом КА), то можно в качестве частного случая рассмотреть и гармонические колебания, оценить поведение средних величин и т.д. При этом, однако, будут потеряны возможности более глубокой интерпретации процессов в материальных средах, появляющиеся при введении комплексных проницаемостей. Поэтому в основу анализа мы положим комплексную систему уравнений Максвелла (5.118).

Запишем эти уравнения, взяв первое из них комплексно-сопряженным:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_m^* &= -i\omega\varepsilon_0\varepsilon^* \dot{\mathbf{E}}_m^* + (\dot{\mathbf{j}}_m^{\text{CT}})^*, \\ \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_m &= -i\omega\mu_0\mu \dot{\mathbf{H}}_m.\end{aligned}\quad (5.133)$$

Все члены первого уравнения умножим на $\dot{\mathbf{E}}_m$, второго – на $\dot{\mathbf{H}}_m^*$. Далее произведем вычитание соответствующих частей (из второго уравнения вычтем первое) и снова применим тождество

$$\operatorname{div}[\mathbf{F}, \mathbf{G}] = \mathbf{G} \operatorname{rot} \mathbf{F} - \mathbf{F} \operatorname{rot} \mathbf{G}.$$

Получим:

$$\operatorname{div}[\dot{\mathbf{E}}_m, \dot{\mathbf{H}}_m^*] = i\omega(\varepsilon_0\varepsilon^* \dot{\mathbf{E}}_m^* \dot{\mathbf{E}}_m - \mu_0\mu \dot{\mathbf{H}}_m \dot{\mathbf{H}}_m^*) - (\dot{\mathbf{j}}_m^{\text{CT}})^* \dot{\mathbf{E}}_m$$

или

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{\Pi}} = i \frac{\omega}{2} (\varepsilon_0\varepsilon^* \dot{\mathbf{E}}_m^* \dot{\mathbf{E}}_m - \mu_0\mu \dot{\mathbf{H}}_m \dot{\mathbf{H}}_m^*) - \dot{p}^{\text{CT}} \quad (5.134)$$

[использованы формулы (5.129) и (5.131)]. Формула (5.134) выражает *плотность комплексной мощности источника*.

Итак, мы получили комплексный аналог уравнения

$$\operatorname{div} \mathbf{\Pi} + \frac{\partial \omega}{\partial t} + p = 0.$$

Путем интегрирования по некоторому объему V с границей S получим из (5.134) равенство:

$$\dot{P}_\Sigma = i \frac{\omega}{2} \int_V (\varepsilon_0\varepsilon^* \dot{\mathbf{E}}_m^* \dot{\mathbf{E}}_m - \mu_0\mu \dot{\mathbf{H}}_m \dot{\mathbf{H}}_m^*) dv - \dot{P}^{\text{CT}}. \quad (5.135)$$

В формуле (5.135) введем обозначения:

$$\dot{P}_\Sigma = \oint_S \dot{\mathbf{\Pi}} ds, \quad \dot{P}^{\text{CT}} = \int_V \dot{p}^{\text{CT}} dv = \frac{1}{2} \int_V (\dot{\mathbf{j}}_m^{\text{CT}})^* \dot{\mathbf{E}}_m dv.$$

Физическое содержание соотношения (5.135) будет понятно после разделения действительных и мнимых частей:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \dot{P}_\Sigma &= -\frac{\omega}{2} \int_V (\varepsilon_0\varepsilon'' \dot{\mathbf{E}}_m \dot{\mathbf{E}}_m^* + \mu_0\mu'' \dot{\mathbf{H}}_m \dot{\mathbf{H}}_m^*) dv - \operatorname{Re} \dot{P}^{\text{CT}}, \\ \operatorname{Im} \dot{P}_\Sigma &= \frac{\omega}{2} \int_V (\varepsilon_0\varepsilon' \dot{\mathbf{E}}_m \dot{\mathbf{E}}_m^* - \mu_0\mu' \dot{\mathbf{H}}_m \dot{\mathbf{H}}_m^*) dv - \operatorname{Im} \dot{P}^{\text{CT}}.\end{aligned}\quad (5.136)$$

Наибольший интерес представляет первое из равенств.

Ввиду формулы (5.132), записанной для среднего значения вектора Пойнтинга, нетрудно объяснить смысл левых частей в формулах (5.136):

- $\operatorname{Re} \dot{P}_\Sigma = \overline{P_\Sigma}$ – среднее значение потока энергии P_Σ через замкнутую поверхность S ,
- $\operatorname{Re} \dot{P}^{\text{ст}}$ – согласно (5.130) – средняя мощность источника.

Таким образом,

$$\overline{P_\Sigma} = -\frac{\omega}{2} \int_V \left(\varepsilon_0 \varepsilon'' \dot{\mathbf{E}}_m^* \dot{\mathbf{E}}_m - \mu_0 \mu'' \dot{\mathbf{H}}_m \dot{\mathbf{H}}_m^* \right) dv - \overline{P^{\text{ст}}}. \quad (5.137)$$

Полученное равенство характеризует *средний баланс энергии при гармонических колебаниях поля*. Действительно, если, в частности, проницаемости вещественны ($\varepsilon'' = \mu'' = 0$), то из (5.137) имеем:

$$\overline{P_\Sigma} = -\overline{P^{\text{ст}}},$$

т.е. мощность источников, расположенных внутри V ($\overline{P^{\text{ст}}} < 0$), расходуется на излучение во внешнее пространство.

Рассмотрим другое состояние. Пусть поток энергии через границу S в среднем равен нулю ($\overline{P_\Sigma} = 0$). Тогда при $\overline{P^{\text{ст}}} < 0$ равенство (5.137) может быть выполнено, только если объемный интеграл в правой части больше нуля.

Смысл баланса очевиден: мощность источников расходуется внутри области V , и это выражается равенством

$$\overline{P_\Pi} = -\overline{P^{\text{ст}}},$$

где $\overline{P_\Pi}$ – средняя мощность потерь в объеме V .

Следовательно,

$$\overline{P_\Pi} = \frac{\omega}{2} \int_V \left(\varepsilon_0 \varepsilon'' \dot{\mathbf{E}}_m^* \dot{\mathbf{E}}_m - \mu_0 \mu'' \dot{\mathbf{H}}_m \dot{\mathbf{H}}_m^* \right) dv. \quad (5.138)$$

При этом должно быть $\varepsilon'' = \mu'' > 0$.

В частном распространенном случае $\mu'' = 0$, $\varepsilon'' \sigma / \omega \varepsilon_0$ из (5.138) следует:

$$\overline{P_\Pi} = \frac{1}{2} \int_V \sigma \dot{\mathbf{E}}_m^* \dot{\mathbf{E}}_m dv. \quad (5.139)$$

В краткой форме *уравнение среднего баланса энергии* (5.137) принимает вид:

$$\overline{P_{\Sigma}} = -\overline{P}, \quad (5.140)$$

где $\overline{P} = \overline{P_{\Pi}} + \overline{P^{ст}}$ – полная средняя мощность, которую называют *активной мощностью*. Средний поток энергии называют также *активным потоком энергии*.

Перейдем к обсуждению второго из соотношений (5.136). Если ограничиться случаем вещественных проницаемостей ($\varepsilon = \varepsilon'$, $\mu = \mu'$), то, с учетом (5.128) для плотностей электрической и магнитной энергий, будем иметь:

$$\text{Im} \dot{P}_{\Sigma} = 2\omega \left(\overline{W^э} - \overline{W^м} \right) - \text{Im} \dot{P}^{ст}. \quad (5.141)$$

Величина $\text{Im} \dot{P}_{\Sigma}$ представляет собой *реактивный поток энергии*, величина $\text{Im} \dot{P}^{ст}$ – *реактивную мощность источника*.

С). Заключительные замечания

▪ О комплексных проницаемостях

Из среднего баланса энергии ясен их энергетический смысл:

- *вещественность* проницаемостей ($\varepsilon'' = \mu'' = 0$) означает, что среда является *не поглощающей*;
- существование *мнимых частей* ($\varepsilon'', \mu'' > 0$) указывает на *электрические и магнитные потери*, т.е. на превращение электрической и магнитной энергии в какую-либо другую не электромагнитную форму (например, в тепло);
- возможны и ситуации, когда $\varepsilon'', \mu'' < 0$: в этом случае имеет место не поглощение, а *генерация* или *регенерация* (восстановление) энергии поля в результате процессов в среде, связанных с преобразованием не электромагнитной энергии. Такие активные (регенеративные) среды действительно приходится рассматривать, например, в теории параметрических или квантовых усилителей и генераторов. При этом, конечно, будет другая интерпретация выражения (5.138).

▪ Степень общности анализа баланса энергии при гармонических колебаниях поля

Во всех рассуждениях подразумевались изотропные среды, однако исходные выкладки, включая получение формулы (5.135), справедливы и при анизотропии. В дальнейшем мы увидим, что для общности необходимо допустить существование *комплексных круговых частот* ω . Формально это ведет лишь к небольшим изменениям основных соотношений, в частности, формула (5.135) принимает вид

$$\overline{P_{\Pi}} = \frac{i}{2} \int_V \left(\omega^* \varepsilon_0 \varepsilon'' \dot{\mathbf{E}}_m^* \dot{\mathbf{E}}_m - \omega \mu_0 \mu'' \dot{\mathbf{H}}_m \dot{\mathbf{H}}_m^* \right) dv - \dot{P}^{\text{ст}}. \quad (5.142)$$

Тогда, если $\omega = \omega' + i\omega''$, затухающие колебания в методе КА будут описываться как гармонические колебания с комплексной частотой, причем ее вещественная часть ω' определяет период колебаний $T' = 2\pi/\omega'$, а мнимая – быстроту затухания (*декремент*): величина $T'' = 2\pi/\omega''$ есть постоянная времени, т.е. время, в течение которого колебания затухают в e раз. Соотношение величины мнимой и действительной частей комплексной частоты определяются выражением:

$$\frac{\omega''}{\omega'} = \text{tg} \left(\frac{\Delta + \Delta^M}{2} \right).$$

Глава 6

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

1. Общие сведения

1.1. Вводные замечания

Определение. Под распространением волны понимается постепенное вовлечение среды в некоторый физический процесс, приводящее к передаче энергии в пространстве.

Представление о волновом процессе чуждо «принципу дальнего действия», допускающему мгновенные физические взаимодействия на расстоянии без участия среды. Пусть в какой-то точке пространства $P(\mathbf{r}')$ наблюдается физический процесс, который можно описать функцией $u(\mathbf{r}', t) = \varphi(t)$ (рис. 6.1а). В другой точке $M(\mathbf{r})$ измерения этой же величины $u(\mathbf{r}, t)$, может быть, покажут отсутствие процесса ($u = 0$). Однако через какое-то время он будет передан средой и мы отметим, что $u(\mathbf{r}, t) = \psi(t)$ (см. рис. 6.1б).

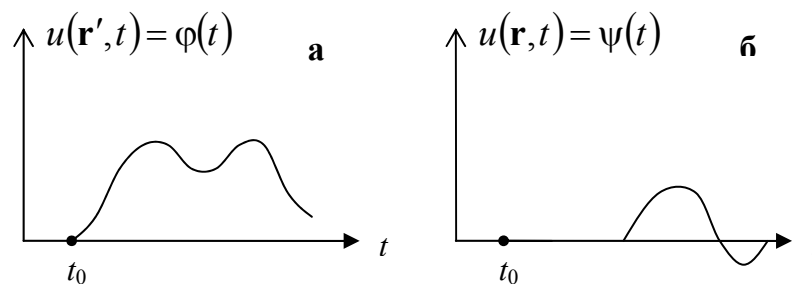


Рис. 6.1

В простейшем случае будет обнаружено лишь запаздывание во времени, т.е. $\Psi(t) = \varphi(t - \tau)$, где τ – время, необходимое для прохождения пути $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \ell$ со скоростью v .

Пусть в пространстве существует зависимость только от одной координаты z . Характеризующая процесс функция $u(z, t) = u(t - z/v)$ построена при $z = 0$ и при $z = \ell$ (рис. 6.2).

Очевидно, что

$$u(\ell, t) = u(t - \ell/v, 0). \quad (6.1)$$

Говорят, что функция (6.1) описывает волну. Иногда волны этого рода называют «недеформируемыми» – временной закон во всех точках простран-

ства одинаков с точностью до сдвига τ (см. рис. 6.2).

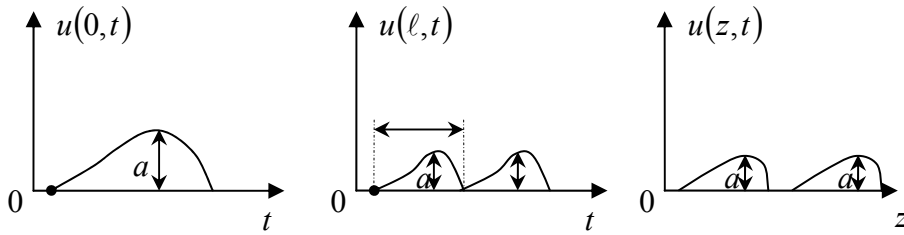


Рис. 6.2

Волна называется *плоской* и *однородной*. Дело в том, что, положив $z = \text{const}$, мы задаем плоскость, на которой согласно (6.1) мгновенное значение функции постоянно. Любую такую плоскость называют *фронтом волны*. Взяв в некоторый момент времени t фронт, для которого $u = a$, легко убедиться, что с течением времени он движется вдоль оси z со скоростью v ($v > 0$).

Плоскую однородную волну, движущуюся с $v < 0$ надо описывать формулой (6.1), но с изменением знака:

$$u(\ell, t) = u(t + \ell/v, 0). \quad (6.1a)$$

Рассмотрим *однородное волновое уравнение*

$$\nabla^2 u - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 u = 0. \quad (6.2)$$

В одномерном случае ($\partial_x = \partial_y = 0$) оно примет вид

$$\partial_z^2 u - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 u = 0. \quad (6.3)$$

Путем непосредственной подстановки легко убедиться, что функции (6.1) и (6.2) являются решениями уравнения (6.3). Общее же решение уравнения (6.3) выражает формула:

$$u(z, t) = u_1(t - z/v) + u_2(t + z/v), \quad (6.4)$$

где u_1 и u_2 – произвольные дважды дифференцируемые функции.

Решение (6.4) – это наложение двух плоских однородных недеформируемых волн, распространяющихся в двух противоположных направлениях.

1.2. Гармонические волны

Если в качестве функции, описывающей волну, взять такую функцию $u(z, t)$, что

$$u(0, t) = u_m \cos(\omega t + \varphi),$$

то в каждой точке пространства процесс будет иметь характер гармонических колебаний:

$$u(z, t) = u_m \cos[\omega(t - z/v) + \varphi]$$

или

$$u(z, t) = u_m \cos(\omega t - kz + \varphi), \quad (6.5)$$

$$k = \omega/v.$$

Волна (6.5) называется *гармонической*, k – *волновое число*.

Как видно, полная фаза гармонических колебаний $(\omega t - kz + \varphi)$ убывает в пространстве пропорционально z (при заданном t), значения функции при этом периодически повторяются. Пространственный период называют *длиной волны* λ :

$$u(z + \lambda, t) = u(z, t).$$

Из (6.5) следует, что $k\lambda = 2\pi$, т.е.

$$k = \omega/v = 2\pi/\lambda \quad (6.6)$$

и

$$v = \lambda f, \quad (6.7)$$

где $f = \omega/2\pi$ – частота процесса. В этом случае v называют *фазовой скоростью*.

Распространение гармонической волны – это движение косинусоидального профиля u вдоль прямой с постоянной скоростью. Такая волна есть одно из частных решений уравнения (6.3).

Метод комплексных амплитуд приводит волновое уравнение (6.3) к виду:

$$d_t^2 \dot{u}_m + k^2 \dot{u}_m = 0. \quad (6.8)$$

Это одномерная форма уравнения Гельмгольца. Его общее решение имеет вид:

$$\dot{u}_m = \dot{P}e^{-ikz} + \dot{Q}e^{ikz}, \quad (6.9)$$

где $\dot{P} = Pe^{i\varphi}$, $\dot{Q} = Qe^{ikz}$ – комплексные константы.

Умножая комплексную амплитуду на $e^{i\omega t}$ и отделяя вещественную часть, получим решение

$$u(z, t) = P \cos(\omega t - kz + \varphi) + Q \cos(\omega t - kz + \psi), \quad (6.10)$$

определяющее наложение двух гармонических волн, движущихся в противоположных направлениях. При $Q = 0$ имеем частное решение в виде одной волны.

Другое частное решение – наложение двух бегущих навстречу волн с одинаковыми амплитудами и фазами ($P = Q$, $\varphi = \psi$) – получаем из (6.10):

$$u(z, t) = 2P \cos kz \cos(\omega t + \varphi). \quad (6.11)$$

Такой процесс называется *стоячей волной*. Он характеризуется синфазностью колебаний. В каждой области постоянства знака множителя $\cos kz$ фаза зависит только от t . В зависимости от z косинусоидально изменяется амплитуда колебаний (рис. 6.3):

$$u_m = 2P |\cos kz|.$$

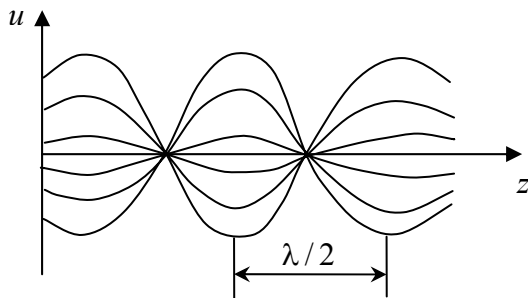


Рис. 6.3

Вдоль оси z процесс u не движется, а испытывает «пульсации». При этом расстояние между двумя соседними нулями (*узлами*) равны $\lambda/2$, таковы же и расстояния между двумя максимумами (*пучностями*).

1.3. Виды волн

Рассмотрим более сложные волновые процессы. Пусть в уравнении Гельмгольца k – комплексное:

$$k = k' - ik''. \quad (6.12)$$

Будем называть его *комплексным волновым числом*. Тогда из (6.9) следует решение, отличающееся от (6.10), – оно содержит экспоненциальные множители:

$$u(z, t) = P e^{-k''z} \cos(\omega t - k'z + \varphi) + Q e^{k''z} \cos(\omega t - k'z + \psi). \quad (6.13)$$

Если $k' > 0$, $k'' > 0$, то первый член описывает затухающую волну – ее амплитуда экспоненциально падает вдоль оси z и в том же направлении смещается осциллированное распределение внутри огибающей. Второй член имеет аналогичный смысл, но волна смещается в противоположном направлении (рис. 6.4).

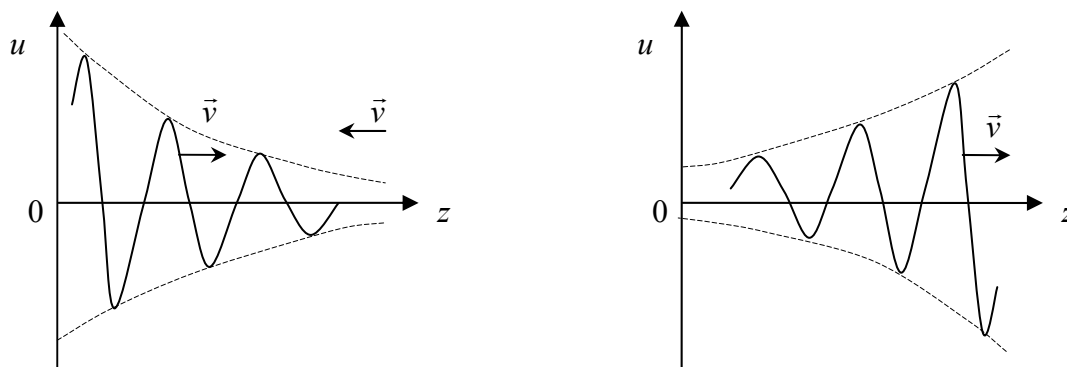


Рис. 6.4

В случае затухания волны величина $k' = \text{Re}k$ играет такую же роль как вещественное волновое число k :

$$k' = \omega / v = 2\pi / \lambda. \quad (6.14)$$

Величина $k'' = -\text{Im}k$ есть коэффициент затухания. Отношение

$$u(z) / u(z + l) = e^{k''l}$$

показывает, во сколько раз уменьшилась амплитуда волны на расстоянии l .

Под *затуханием* L понимают величину, определяемую как натуральный логарифм или 20 десятичных логарифмов этого отношения. В первом случае L измеряется в *неперах* [Нп], во втором – в *децибелах* [дБ]:

$$L = k''l \text{ Нп}, \quad L = 20 \lg e^{k''l} \approx 8.69 k''l \text{ дБ}. \quad (6.15)$$

В принципе возможны волны, фазовые скорости которых направлены в сторону роста амплитуды волны (случай $k' > 0$, $k'' < 0$).

Вернемся теперь к формуле (6.5):

$$u(z, t) = u_m \cos(\omega t - kz + \varphi).$$

Гармоническая волна такого вида называется *плоской*, так как в каждой плоскости $z = \text{const}$ фаза процесса постоянна. Она *однородна* ввиду постоянства амплитуды в этой плоскости. Затухающая волна, в которой $u_m = u_m(z)$, так-

же будет однородной. Однако волна трехмерная:

$$u(x, y, z, t) = u_m(x, y) \cos[\omega t - kz + \varphi(x, y)] \quad (6.16)$$

будет уже *неоднородной* – ее амплитуда не является постоянной в плоскости фронта $z = \text{const}$. Однако в более широком смысле она все же считается *плоской*, хотя $\varphi = \varphi(x, y)$.

В случае же, когда

$$u(x, y, z, t) = u_m(x, y, z) \cos[\omega t - kz + \varphi(x, y, z)], \quad (6.17)$$

волна уже является *неоднородной* и *неплоской*. Ее фронт, понимаемый как поверхность одинаковой фазы при $t = \text{const}$, определяется уравнением

$$\varphi(x, y, z) = \text{const}. \quad (6.18)$$

Например, в случае

$$\varphi(x, y, z) = kr + \varphi_0,$$

где r – сферическая радиальная координата, $\varphi_0 = \text{const}$, получается уравнение сферической поверхности. Волна называется *сферической*. Если r – цилиндрическая радиальная координата, то фронт волны – цилиндрическая поверхность, и волна называется *цилиндрической*.

Сферическая волна, возникающая в результате действия точечного источника, называется *расходящейся*, ее фронт при распространении расширяется. Рассматриваются и *сходящиеся* сферические волны, когда поверхность фронта вырождается в точку, в большинстве случаев, однако, такие волны не имеют физического содержания. Неплоская волна (например, сферическая) может быть *локально плоской*, т.е. практически неотличимой от плоской в той локальной области, где она рассматривается.

Мы далеко не исчерпали все разновидности волновых процессов. К тому же мы рассмотрели только скалярные волны, когда физический процесс может быть охарактеризован скалярной функцией. Однако эти первоначальные сведения будут служить ориентиром при дальнейшем изучении электромагнитных волн.

2. Плоские однородные электромагнитные волны

Обратимся к уравнениям Даламбера, которые мы рассматривали в разделе 5.1 главы 5: для векторов \mathbf{H} и \mathbf{E} – уравнения (5.105), (5.106), для векторного \mathbf{A} и скалярного φ потенциалов – уравнения (5.111), (5.112). При ра-

венстве правых частей нулю, они превращаются в однородные векторные волновые уравнения.

Используя декартовы координаты, заметим, что каждая из компонент векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} ($H_x, H_y, H_z, E_x, \dots$) подчиняется волновому уравнению (6.3), которое мы рассматривали в предыдущем разделе:

$$\partial_z^2 u - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 u = 0.$$

При этом мы найдем:

$$v = c / \sqrt{\epsilon_r \mu_r}. \quad (6.19)$$

Общие выражения компонент поля, следовательно, будут решениями типа (6.4), где v имеет вид (6.19).

Таким образом, мы установили скорость распространения плоских однородных электромагнитных волн в идеальном диэлектрике. В частности, в вакууме ($\mu_r = \epsilon_r = 1$):

$$v = c = 1 / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 2,998 \cdot 10^8 \text{ м/с}. \quad (6.20)$$

2.1. Одномерный гармонический электромагнитный процесс

Будем рассматривать свободное (без источников) электромагнитное поле, которое изменяется в пространстве только вдоль оси z . Какой же характер имеет электромагнитное поле в целом?

Возьмем уравнения Максвелла в комплексной форме (5.118), положив $\mathbf{j}_m^{\text{CT}} = 0$. Запишем их в координатной форме с учетом $\partial_x = \partial_y = 0$:

$$\begin{cases} d_z \dot{H}_{my} = -i\omega \epsilon_0 \epsilon \dot{E}_{mx}, & d_z \dot{E}_{my} = i\omega \mu_0 \mu \dot{H}_{mx}, \\ d_z \dot{H}_{mx} = i\omega \epsilon_0 \epsilon \dot{E}_{my}, & d_z \dot{E}_{mx} = -i\omega \mu_0 \mu \dot{H}_{my}, \\ \dot{H}_{mz} = 0; & \dot{E}_{mz} = 0. \end{cases} \quad (6.21)$$

Отсюда видно, что ЭМ поле не имеет продольных компонент E_z, H_z . Поперечные же компоненты образуют две независимые пары E_x, H_y и E_y, H_x .

Если, например, получено какое-либо решение системы (6.21) для комплексных амплитуд

$$\dot{E}_{mx}, \dot{H}_{my}; \quad \dot{E}_{my}, \dot{H}_{mx}, \quad (6.22)$$

то решением будет и следующий набор:

$$c_1 \dot{E}_{mx}, c_1 \dot{H}_{my}; \quad c_2 \dot{E}_{my}, c_2 \dot{H}_{mx}. \quad (6.23)$$

Если положить вначале $c_2 = 0$, затем $c_1 = 0$, то получим два независимых решения.

Выпишем первое решение. Компоненту \dot{E}_{mx} выразим при помощи формулы (6.9), а компоненту \dot{H}_{my} найдем из (6.21):

$$\begin{aligned} \dot{E}_{m1} &= \mathbf{x}_0 (\dot{A} e^{-ikz} + \dot{B} e^{ikz}), \\ \dot{H}_{m1} &= \mathbf{y}_0 \frac{1}{W} (\dot{A} e^{-ikz} - \dot{B} e^{ikz}), \end{aligned} \quad (6.24)$$

где \dot{A} , \dot{B} – произвольные комплексные константы [раньше, в разделе 1.2 настоящей главы, \dot{P} , \dot{Q} – см. формулу (6.9)];

$$W = \sqrt{\mu_0 \mu / \varepsilon_0 \varepsilon} = W_0 \sqrt{\mu / \varepsilon}, \quad (6.25)$$

W называется *волновым сопротивлением*. В случае вакуума ($\mu = \varepsilon = 1$)

$$W = W_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0} = 120\pi \text{ (Ом)}. \quad (6.26)$$

Аналогично получается второе решение системы.

2.2. Волны в идеальном диэлектрике

Рассмотрим подробнее наши результаты для случая идеального диэлектрика (ε , μ – вещественны). Возьмем первый член решения (6.24), когда

$\dot{B} = 0$. Переходя от комплексных амплитуд к векторам поля (после умножения комплексных амплитуд на $\exp(i\omega t)$ отделены вещественные части) найдем:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{x}_0 A \cos(\omega t - kz + \varphi), \\ \mathbf{H} &= \mathbf{y}_0 \frac{A}{W} \cos(\omega t - kz + \varphi). \end{aligned} \quad (6.27)$$

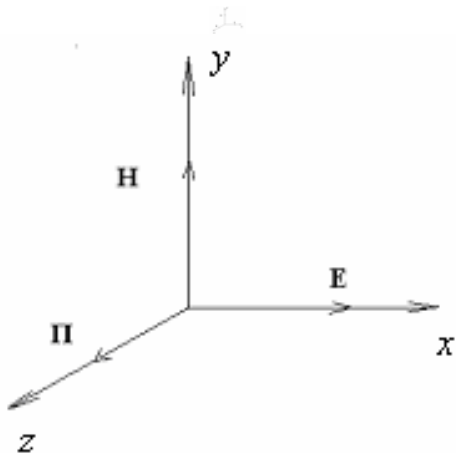


Рис. 6.5

Это плоская однородная гармоническая волна, распространяющаяся вдоль оси z .

Вектора \mathbf{E} и \mathbf{H} взаимно перпендикулярны и лежат в плоскости фронта $z = \text{const}$, а вектор Пойнтинга $\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$ направлен в сторону распространения волны (рис. 6.5). Векторы \mathbf{E} , \mathbf{H} , $\mathbf{\Pi}$ образуют правую тройку векторов, причем

$$\mathbf{E} = W [\mathbf{H}, \mathbf{z}_0], \quad \mathbf{H} = W^{-1} [\mathbf{z}_0, \mathbf{E}]. \quad (6.28)$$

«Мгновенный снимок» распределения поля выглядит, как показано на рис. 6.6.

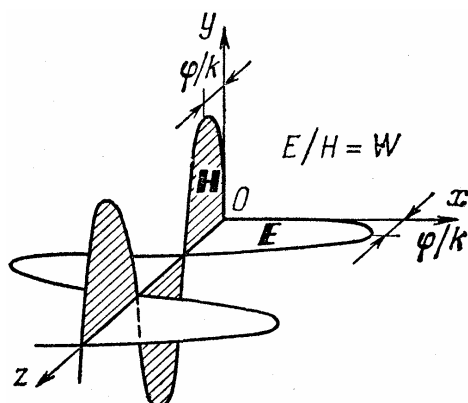


Рис. 6.6

Вычислим энергетические характеристики волны.

Плотности электрической и магнитной энергии $w^{\text{э}}$ и $w^{\text{м}}$ оказываются одинаковыми:

$$w^{\text{э}} = w^{\text{м}} = \frac{w}{2} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A^2}{2} \cos^2(\omega t - kz + \varphi), \quad (6.29)$$

их средние величины: $\overline{w^{\text{э}}} = \overline{w^{\text{м}}} = \varepsilon_r \varepsilon_0 A^2 / 4$. Вектор Пойнтинга:

$$\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}] = \mathbf{z}_0 \frac{A^2}{W} \cos^2(\omega t - kz + \varphi). \quad (6.30)$$

Заметим, что комплексный вектор $\dot{\mathbf{\Pi}}$ – величина чисто вещественная, так как \mathbf{E} и \mathbf{H} колеблются в фазе. Поэтому его средняя величина

$$\overline{\mathbf{\Pi}} = \frac{1}{2} = \text{Re} [\dot{\mathbf{E}}_m, \dot{\mathbf{H}}_m] = \mathbf{z}_0 \frac{A^2}{2W} = \frac{1}{2} \mathbf{z}_0 \mathbf{\Pi}_{\text{max}}. \quad (6.31)$$

На основании формулы (6.29) можно найти по известной формуле скорость движения энергии, переносимой волной:

$$\mathbf{v}_\vartheta = \frac{\mathbf{\Pi}}{w} = \mathbf{z}_0 \frac{1}{\varepsilon_r \varepsilon_0 W} = \mathbf{z}_0 \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}. \quad (6.32)$$

Видно, что $\mathbf{v}_\vartheta = \text{const}$ и совпадает с фазовой скоростью. Формальное различие состоит в том, что функция \mathbf{v}_ϑ – векторная в формуле (6.32).

Все четыре волны, которые можно получить рассматривая решение (6.24) при $\dot{B} = 0, \dot{A} \neq 0$; $\dot{A} = 0, \dot{B} \neq 0$ и аналогичное решение для второй волны, описывают одно и то же электромагнитное поле при разных ориентациях векторов. Второе и первое решения переходят друг в друга при повороте относительно оси z на 90° (рис. 6.7).

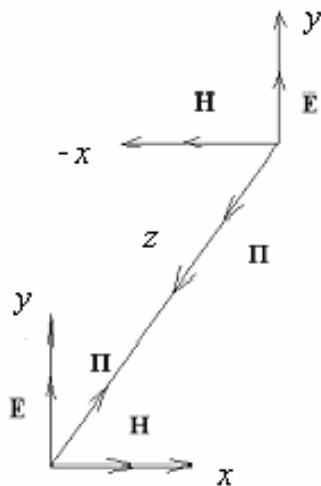
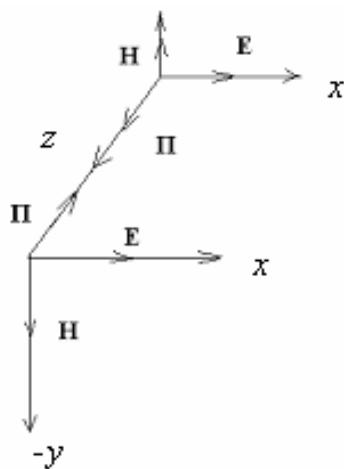


Рис. 6.7

2.3. Волны в поглощающих средах

Пусть теперь волновое число $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon \mu}$ – величина комплексная ввиду комплексности проницаемостей ε, μ :

$$k = k' - ik'' = \pm |k| e^{-i(\Delta + \Delta^m)/2}, \quad (6.33)$$

где Δ, Δ^m – соответственно углы электрических и магнитных потерь,

$$|k| = \frac{\omega}{c} \sqrt{|\varepsilon| |\mu|}.$$

Поскольку одновременное изменение знаков k' и k'' только меняет ролями первый и второй члены в решениях (6.24), выберем в (6.33) знак плюс.

Для поглощающих сред проницаемости $\varepsilon'', \mu'' \geq 0$, причем хотя бы одна из них отлична от нуля. Вещественные части ε', μ' будем считать большими нуля (это условие нарушается крайне редко). Тогда углы Δ и Δ^m лежат в диапазоне $0 \div 90^\circ$, то же и их полусумма. Легко тогда убедиться, что k' и k'' – одного знака; будем считать $k', k'' > 0$.

Рассмотрим, как это уже делали раньше, частное решение, получаемое из (6.24) при $\dot{B} = 0$:

$$\dot{\mathbf{E}}_m = \mathbf{x}_0 A e^{-ikz}, \quad \dot{\mathbf{H}}_m = \mathbf{y}_0 \frac{A}{W} e^{-ikz}. \quad (6.34)$$

Здесь волновое сопротивление W – величина комплексная:

$$W = |W| e^{i\varphi W}.$$

Далее, вспоминая формулы (6.28), запишем:

$$\dot{\mathbf{E}}_m = W [\dot{\mathbf{H}}_m, \mathbf{z}_0], \quad \dot{\mathbf{H}}_m = W^{-1} [\mathbf{z}_0, \dot{\mathbf{E}}_m]. \quad (6.35)$$

Переходя от комплексных амплитуд к векторам поля, получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{x}_0 A e^{-k''z} \cos(\omega t - k'z + \varphi), \\ \mathbf{H} &= \mathbf{y}_0 \frac{A}{|W|} e^{-k''z} \cos(\omega t - k'z + \varphi - \varphi_W). \end{aligned} \quad (6.36)$$

Решения (6.36), как мы уже знаем из предыдущего материала, описывают *затухающую волну*. В отличие от непоглощающей среды вектора \mathbf{E} и \mathbf{H} уже *не синфазны*.

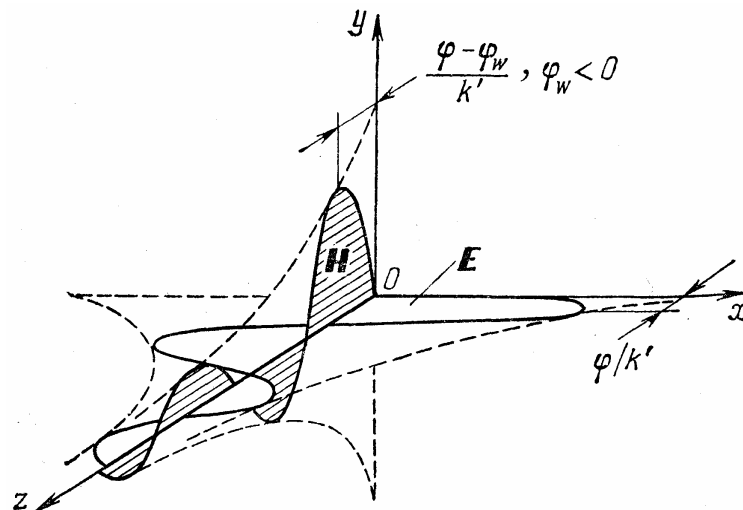


Рис. 6.8

Средний вектор:

$$\bar{\mathbf{\Pi}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{E}}_m, \dot{\mathbf{H}}_m] = \mathbf{z}_0 \frac{A^2}{2|W|} e^{-2k''z} \cos \varphi_W. \quad (6.37)$$

Рассмотрим случай, когда магнитные потери отсутствуют, т.е. $\mu'' = 0$. В этом случае, возводя в квадрат комплексное волновое число и разделяя действительные и мнимые части, легко получить:

$$\begin{aligned} k' &= \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon' \mu'} \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \Delta} \right)}, \\ k'' &= \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon' \mu'} \sqrt{\frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \Delta} \right)}. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Пренебрежем далее инерционностью поляризации, тогда

$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon_r - i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0}, \quad \operatorname{tg} \Delta = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r} \quad (\alpha=0)$$

[см. формулы (5.113), (5.117)].

Рассматривая диэлектрик ($\operatorname{tg} \Delta \ll 1$) и раскладывая комплексное k в ряд, получим:

$$\begin{aligned} k' &\approx \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon' \mu'}, \\ k'' &\approx k' \frac{\operatorname{tg} \Delta}{2} = \frac{\sigma}{2} W_0 \sqrt{\frac{\mu'}{\varepsilon'}}. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Таким образом, фазовая скорость и длина волны (v и λ) в диалектике зависят только от k' , и мало изменяются при переходе от неидеального диалектика к идеальному.

Коэффициент затухания можно считать пропорциональным $\operatorname{tg} \Delta$, который много меньше единицы. Волновое сопротивление в случае диалектика имеет малую мнимую часть

$$W \approx W_0 \sqrt{\frac{\mu'}{\varepsilon'}} \left(1 + i \frac{\operatorname{tg} \Delta}{2} \right). \quad (6.40)$$

Рассмотрим теперь проводник ($\operatorname{tg} \Delta \gg 1$) При этом

$$\left. \begin{aligned} k' \\ k'' \end{aligned} \right\} \approx \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon' \mu'} \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \Delta}{2}} = \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \mu \sigma}{2}}, \quad (6.41)$$

$$W \approx (1 + i) \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \mu}{2 \sigma}}. \quad (6.42)$$

Поскольку величина k' связана с частотой нелинейной зависимостью, то согласно формуле $k' = \omega/v = 2\pi/\lambda$ от частоты будет зависеть фазовая скорость волны.

С ростом σ , ν и λ в проводнике будут уменьшаться, затухание будет расти. В металлах затухание на много порядков выше, чем в диэлектриках.

При переходе к идеальному проводнику ($\sigma \rightarrow \infty$) затухание (k'') неограниченно растет. Следовательно, в идеальном проводнике не может существовать электромагнитное поле.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Элементы векторной алгебры и векторного анализа

1.1. Векторы (векторная алгебра)

Определение. **Векторами** называются величины, которые характеризуются численным значением (модулем) и направлением и, кроме того, складываются геометрически (т.е. по правилу параллелограмма).

Впоследствии мы дадим более общее определение, справедливое для пространства n измерений.

Определение. **Скалярным произведением** двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} называется скалярная величина

$$\mathbf{ab} \equiv (\mathbf{ab}) = ab \cos \varphi = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (\text{П.1.1})$$

Свойства скалярного произведения:

1. коммутативно: $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$;
2. дистрибутивно: $\mathbf{a}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \dots) = \mathbf{ab}_1 + \mathbf{ab}_2 + \dots$;
3. НЕ ассоциативно: $\mathbf{a}(\mathbf{bc}) \neq (\mathbf{ab})\mathbf{c}$.

Определение. **Векторным произведением** векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} называется вектор

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}, \mathbf{b}] &\equiv \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{v}_0 ab \sin \varphi = \\ &= x_0 (a_y b_z - a_z b_y) + y_0 (a_z b_x - a_x b_z) + z_0 (a_x b_y - a_y b_x), \end{aligned} \quad (\text{П.1.2})$$

где \mathbf{v}_0 – единичный вектор нормали к плоскости, образуемой векторами \mathbf{a}, \mathbf{b} , причем векторы \mathbf{a}, \mathbf{b} и \mathbf{v}_0 образуют *правую тройку* векторов; x_0, y_0, z_0 – *орты* (единичные векторы) осей x, y, z , соответственно.

В краткой записи:
$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (\text{П.1.2a})$$

Свойства векторного произведения:

1. НЕ коммутативно: $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \neq [\mathbf{b}, \mathbf{a}]$;
2. дистрибутивно: $[\mathbf{a}, (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \dots)] = [\mathbf{ab}_1] + [\mathbf{ab}_2] + \dots$;
3. НЕ ассоциативно: $[\mathbf{a}, (\mathbf{b}, \mathbf{c})] \neq [(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \mathbf{c}]$.

Определение. Смешанное (скалярно-векторное) произведение трех векторов \mathbf{a}, \mathbf{b} и \mathbf{c} [из формул (П.1.1), (П.1.2)]:

$$\mathbf{a}[\mathbf{b}, \mathbf{c}] = a \left\{ bc \sin(\hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{c}}) \right\} \cos(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{n}}). \quad (\text{П.1.3})$$

Из рис. П.1 видно, что выражение (П.1.3) дает *объем параллелепипеда*, построенного на векторах \mathbf{a}, \mathbf{b} и \mathbf{c} :

- $bc \sin(\hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{c}})$ дает площадь основания параллелепипеда;
- $a \cos(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{n}})$ – его высоту.

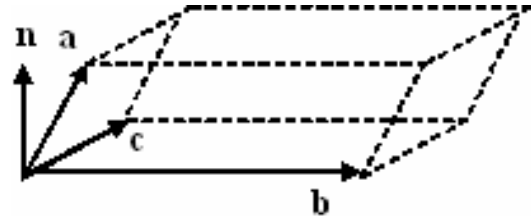


Рис. П.1

Предполагается, что угол $(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{n}})$ – острый, если он тупой, то (П.1.3) дает объем параллелепипеда с обратным знаком.

В качестве основания параллелепипеда можно взять любую его грань. Следовательно, можно записать свойство смешанного произведения:

$$\mathbf{a}[\mathbf{b}, \mathbf{c}] = \mathbf{b}[\mathbf{c}, \mathbf{a}] = \mathbf{c}[\mathbf{a}, \mathbf{b}].$$

Таким образом, смешанное произведение допускает *циклическую замену сомножителей* (рис. П.2). Если произвести замену в обратном направлении, то смешанное произведение сменит знак.

В короткой записи скалярно-векторное произведение имеет вид:

$$\mathbf{a}[\mathbf{b}, \mathbf{c}] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

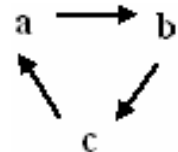


Рис. П.2

Определение. Двойным векторным произведением называется вектор

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (\text{П.1.4})$$

(читается «бац минус цаб»).

Запишем также формулу для *квадрата векторного произведения*:

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}, \mathbf{b}]^2 &= a^2 b^2 \sin^2(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) = a^2 b^2 - a^2 b^2 \cos^2(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) = \\ &= \mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2. \end{aligned} \quad (\text{П.1.5})$$

n – линейное пространство

Теперь обозначим орты $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \dots$, а проекции вектора, с которым будем производить операции, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots$. Тогда вектор запишется формулой:

$$\mathbf{a} = \sum_k \mathbf{e}_k \mathbf{a}_k.$$

Поскольку векторы \mathbf{e}_k взаимно не перпендикулярные, а их модули равны единице, то можно записать:

Определение: $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_k = \delta_{ik},$

где символ Кронекера – $\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k; \\ 0, & \text{если } i \neq k. \end{cases}$

Тогда для скалярного произведения получим:

$$\mathbf{ab} = \sum_k \mathbf{e}_k b_k \sum_i \mathbf{e}_i a_i = \sum_{i,k} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k a_i b_k = \sum_{i,k} \delta_{ik} a_i b_k.$$

В соответствии с определением δ_{ik} в последней сумме не равны нулю только слагаемые с совпадающими индексами, т.е.

$$\mathbf{ab} = \sum_i a_i b_i \Big|_{1 \leq i \leq 3} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

[ср. с формулой (П.1.1)].

Отметим, что для заданных векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} их проекции на оси координат зависят от выбора системы координат, но само скалярное произведение \mathbf{ab} от этого выбора *не зависит*, т.е. является *инвариантом* (одинаково во всех системах координат).

Образует теперь векторное произведение $\mathbf{a} = \sum_i \mathbf{e}_i \mathbf{a}_i$ и $\mathbf{b} = \sum_k \mathbf{e}_k \mathbf{b}_k$:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \left[\left(\sum_i \mathbf{e}_i \mathbf{a}_i \right), \left(\sum_k \mathbf{e}_k \mathbf{b}_k \right) \right].$$

В силу *дистрибутивности* можно записать:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \sum_i [\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k] \mathbf{a}_i \mathbf{b}_k. \quad (\text{П.1.6})$$

Сделаем далее следующую замену, введя новый символ ε_{ikl} :

$$[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k] = \sum_l \varepsilon_{ikl} \mathbf{e}_l. \quad (\text{П.1.7})$$

Определение. Символ ε_{ikl} обозначает набор из 27 чисел, которые определяются следующими правилами:

- 1) если значения хотя бы двух индексов совпадают, то $\varepsilon_{ikl}=0$.
- 2) если все индексы разные и образуют циклическую перестановку чисел 1, 2, 3 (в 3-мерном пространстве), то $\varepsilon_{ikl}=1$ ($\varepsilon_{123}=\varepsilon_{231}=\varepsilon_{312}=1$).
- 3) если все индексы разные и образуют циклическую перестановку чисел 1, 2, 3 (в 3-мерном пространстве), то $\varepsilon_{ikl}=-1$.

Таким образом, из 27 значений ε_{ikl} : 21 значение равно нулю,

3 значения равны 1 и

3 значения равны -1 .

Используя символ ε_{ikl} , мы можем для векторных произведений ортов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$:

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] &= \mathbf{e}_3 \\ [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] &= \mathbf{e}_1 \\ [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1] &= \mathbf{e}_2 \end{aligned} \right\}$$

записать одну формулу (П.1.7). Тогда из (П.1.6) и (П.1.7) получим:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \sum_{i,k,l} \varepsilon_{ikl} a_i b_k \mathbf{e}_l. \quad (\text{П.1.8})$$

Из 27 слагаемых этой суммы (для 3-мерного пространства) отличны от нуля только 6.

Рассмотрим теперь формулы преобразования компонент векторов при переходе от одной системы координат к другой.

Пусть имеются две системы прямоугольных координат K и K' , которые заданы базисами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$.

Произвольный вектор \mathbf{a} в K и K' будем выражаться как

$$\mathbf{a} = \sum_k \mathbf{e}_k a_k, \quad \mathbf{a} = \sum_k \mathbf{e}'_k a'_k$$

и

$$\sum_k \mathbf{e}_k a_k = \sum_k \mathbf{e}'_k a'_k. \quad (\text{П.1.9})$$

Умножим на орт \mathbf{e}'_i :

$$\sum_k \mathbf{e}'_i \mathbf{e}_k a_k = \sum_k \mathbf{e}'_i \mathbf{e}'_k a'_k, \quad (\text{П.1.10})$$

$$\mathbf{e}'_i \mathbf{e}'_k = \delta_{ik}.$$

В правой части из трех слагаемых отличны от нуля только слагаемые с $i=k$: $\delta_{ii} a'_i = a'_i$.

Скалярное произведение $\mathbf{e}'_i \mathbf{e}_k$ равно косинусу угла между осью системы K' и осью системы K : $\mathbf{e}'_i \mathbf{e}_k = \cos(\mathbf{x}'_i, \hat{\mathbf{x}}_k)$ ($i, k = 1, 2, 3$).

Обозначим:

$$\alpha_{ik} = \mathbf{e}'_i \mathbf{e}_k = \cos(\mathbf{x}'_i, \hat{\mathbf{x}}_k). \quad (\text{П.1.11})$$

Тогда формулу (П.1.10) можно переписать следующим образом:

$$a'_i = \sum_k \alpha_{ik} a_k, \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{П.1.12})$$

Формула (П.1.12) позволяет по известным проекциям a_k вектора \mathbf{a} на оси системы K вычислить проекции \mathbf{a} на оси системы K' .

Чтобы получить формулы обратного преобразования (от K' к K), умножим формулу (П.1.9) на орт \mathbf{e}_i . Повторив все рассуждения, получим при этом:

$$a_i = \sum_k \alpha_{ki} a'_k, \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{П.1.13})$$

Формулы (П.1.12) и (П.1.13) отличаются только тем, что в первом случае суммирование производится по второму индексу, а во втором – по первому.

Преобразования (П.1.12) и (П.1.13) могут быть приняты в качестве определения вектора:

Определение. Вектором называется совокупность величин a_1, a_2, a_3, \dots , которые при переходе от одной системы координат к другой преобразуются по формулам (П.1.12) и (П.1.13), где α_{ik} – величины, определяемые формулой (П.1.11).

Скалярное произведение легко обобщается на пространство n -измерений:

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i, \quad \text{где} \quad \begin{cases} \mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \\ \mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n). \end{cases} \quad (\text{П.1.14})$$

Данное выражение является *инвариантом*, т.е. его значение не изменяется при переходе от одной системы координат к другой.

1.2. Некоторые формулы векторного анализа

1.2.1. Градиент

Рассмотрим скалярное поле, т.е. область пространства, каждой точке P которого соответствует определенное значение скаляра φ :

$$\varphi = \varphi(P) = \varphi(\underbrace{\mathbf{r}}_{\substack{\text{радиус-} \\ \text{вектор}}} = \varphi(\underbrace{(x_1, x_2, x_3)}_{\substack{\text{декартовы коорди-} \\ \text{наты точки } P}})$$

Всем точкам поверхности, определяемой уравнением

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \text{const}, \quad (\text{П.1.15})$$

соответствует одинаковое значение скаляра φ .

Определение: поверхность вида (П.1.15) называется **поверхностью уровня скаляра φ** .

Поверхность уровня можно провести через любую точку поля. При смещении точки P на отрезок $d\mathbf{r}$ функция φ получает приращение

$$d\varphi = \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i. \quad (\text{П.1.16})$$

Это выражение не зависит от выбора координат x_i , т.е. представляет собой *инвариант*. Совокупность величин x_i образует вектор $d\mathbf{r}$. Поэтому можно утверждать, что величины $\partial \varphi / \partial x_i$ суть проекции некоторого вектора на оси x_i .

Определение. Этот вектор называют **градиентом скаляра φ** :

$$\text{grad } \varphi = \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \quad (\text{П.1.17.1})$$

или, в обычных обозначениях,

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (\text{П.1.17.2})$$

Таким образом, *градиент есть математическая операция над скалярной функцией, в результате которой возникает векторная функция*.

Запишем выражение градиента функции φ :

(а) в произвольных ортогональных криволинейных координатах:

$$\text{grad } \varphi = \mathbf{e}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + \mathbf{e}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} + \mathbf{e}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3}. \quad (\text{П.1.18})$$

Здесь q_1, q_2, q_3 – координаты в пространстве Q ;

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ – орты осей $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$;

h_1, h_2, h_3 – метрические коэффициенты.

(б) в цилиндрических координатах (рис. П.3):

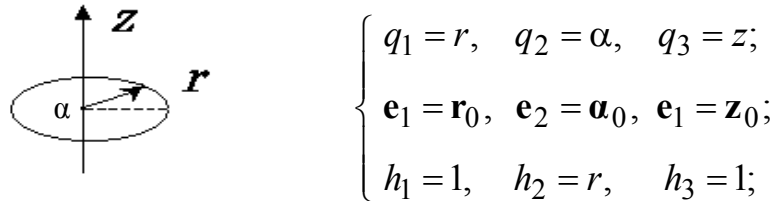


Рис. П.3

(в) в сферических координатах:

$$\begin{cases} q_1 = r, & q_2 = \theta, & q_3 = \alpha; \\ \mathbf{e}_1 = \mathbf{r}_0, & \mathbf{e}_2 = \boldsymbol{\theta}_0, & \mathbf{e}_3 = \boldsymbol{\alpha}_0; \\ h_1 = 1, & h_2 = r, & h_3 = r \sin \theta. \end{cases}$$

Гамильтон ввел *векторный дифференциальный оператор* – ∇ («набла» или *оператор Гамильтона*):

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} = \sum_i \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (\text{П.1.19})$$

Сам по себе вектор ∇ смысла не имеет. Он приобретает смысл, будучи применен к скалярной или векторной функции. Так при символическом умножении ∇ на φ получается градиент φ :

$$\nabla \varphi = \sum_i \mathbf{e}_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \Rightarrow \nabla \varphi \equiv \text{grad } \varphi. \quad (\text{П.1.20})$$

Согласно формуле (П.1.16) приращение φ может быть представлено в виде скалярного произведения векторов $\text{grad } \varphi$ и $d\mathbf{r}$:

$$d\varphi = \text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{r} = (\nabla \varphi) d\mathbf{r}. \quad (\text{П.1.21})$$

При перемещении по поверхности уровня φ $d\varphi = 0$, отсюда из формулы (П.1.21) вытекает, что *вектор* $\nabla \varphi$ в каждой точке поля *направлен по нормали к поверхности уровня* (скалярное произведение равно нулю, следовательно $\nabla \varphi \perp d\mathbf{r}$).

Отметим также следующее. Вектор $\nabla\varphi$ существует в каждой точке скалярного поля φ . Следовательно, *градиент образует векторное поле*, т.е. область пространства, каждой точке которого соответствует определенное значение вектора $\nabla\varphi$.

1.2.2. Дивергенция

Пусть нам дано поле вектора \mathbf{a} . Потоком вектора \mathbf{a} через поверхность ΔS является выражение:

$$\Phi_a = \oint_{\Delta S} \mathbf{a} \, ds, \quad (\text{П.1.22})$$

где ds – вектор элементарной площадки, его модуль равен ds , а направление совпадает с напряжением внешней нормали к поверхности ΔS .

Название «поток» сложилось исторически и восходит своими корнями к гидродинамике. Так, в случае поля вектора скорости жидкости интеграл (П.1.22) дает поток жидкости через поверхность ΔS , т.е. объем жидкости, протекающей через ΔS в единицу времени.

При рассмотрении задач векторного анализа вводят понятие об *источнике*, создающем поле, и о *стоке*, его поглощающем.

В электродинамике в качестве источника можно рассматривать передающую антенну, а в качестве стока – приемную.

Определение. **Интенсивность источника** или **стока** поля принято характеризовать математической операцией, называемой **дивергенцией**, которая определяется в точке, путем предельного перехода, когда замкнутая поверхность ΔS , окружающая эту точку, стягивается в точку:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{a} \, ds}{\Delta V}. \quad (\text{П.1.23})$$

Из свойств скалярного произведения в подынтегральном выражении формулы можно заключить, что:

- 1) когда угол (\mathbf{a}, ds) *острый*, то $\operatorname{div} \mathbf{a} > 0$ и поле будет *выходить* из точки;
- 2) когда угол (\mathbf{a}, ds) *тупой*, то $\operatorname{div} \mathbf{a} < 0$ и поле будет *входить* в точку, в которой определяется дивергенция.

Примеры векторных полей, где дивергенция имеет разные знаки, а также равна нулю, показаны на рис. П.4. В последнем примере суммарный поток через поверхность ΔS равен нулю, поэтому дивергенция в точке, окруженной поверхностью ΔS , равна нулю. То же – в случае, когда поля нет. В точке нет ни источника, ни стока поля.

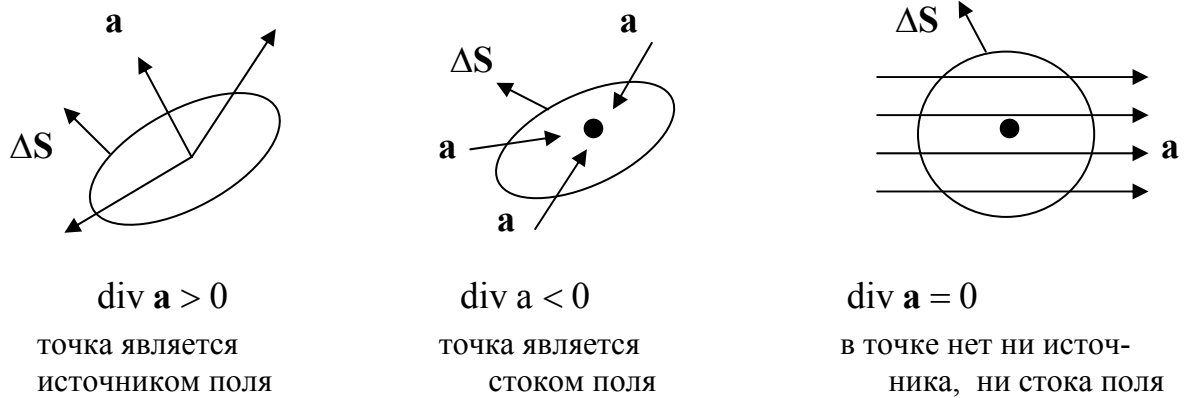


Рис. П.4

Математически, дивергенция определяется также через *дифференциальный оператор Гамильтона*, примененный к векторному полю (вектору):

$$\operatorname{div} \mathbf{a} \equiv \nabla \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \quad (\text{П.1.24})$$

(в декартовых координатах; $\nabla \mathbf{a}$ – скалярное произведение ∇ и \mathbf{a}).

Дивергенция определяется через оператор Гамильтона также:

(а) в произвольных ортогональных криволинейных координатах:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} \equiv \nabla \mathbf{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 a_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 h_1 a_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 a_3) \right]; \quad (\text{П.1.25})$$

(б) в цилиндрических координатах:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r a_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial a_z}{\partial z}; \quad (\text{П.1.26})$$

(в) в сферических координатах:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta a_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\alpha}{\partial \alpha}. \quad (\text{П.1.27})$$

Из формулы (П.1.23), определяющей дивергенцию вектора \mathbf{a} , следует очень важная теорема. Предел в правой части (П.1.23) определяет производную по V :

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{d}{dV} \oint_S \mathbf{a} ds.$$

Возьмем от левой и правой частей этого равенства интеграл по объему V :

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{a} dV = \oint_S \mathbf{a} ds. \quad (\text{П.1.28})$$

Теорема: Полученное утверждение носит название **теоремы Остроградско-го-Гаусса**, которая состоит в том, что *поток вектора \mathbf{a} через замкнутую поверхность S равен интегралу по объему, ограниченному этой поверхностью, от дивергенции вектора \mathbf{a} .*

1.2.3. Ротор

Помимо дивергенции в векторном анализе для характеристики поля используют математическую операцию, называемую **ротором** (вихрем), при этом *полученное значение определяет завихренность векторного поля.*

Ротор поля вектора \mathbf{a} обозначают $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ и определяется следующим выражением:

$$\operatorname{rot}_n \mathbf{a} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta l} \mathbf{a} d\mathbf{l}}{\Delta S} \mathbf{I}_n, \quad (\text{П.1.29})$$

где $\operatorname{rot}_n \mathbf{a}$ – составляющая ротора, ориентированная по направлению единичной нормали \mathbf{I}_n к поверхности ΔS ,

$\oint_{\Delta l} \mathbf{a} d\mathbf{l}$ – интеграл по малому замкнутому контуру Δl , охватывающему малую поверхность ΔS (рис. П.5)

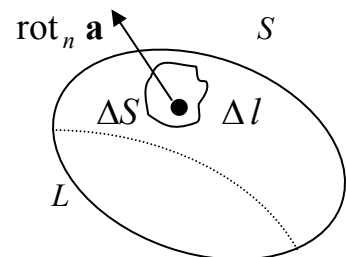


Рис. П.5

Путем предельного перехода ΔS стягивается в точку. Таким образом, ротор есть *векторная функция векторного аргумента.*

Из формулы (П.1.29), осуществляя предельный переход, получим:

$$\operatorname{rot}_n \mathbf{a} = \frac{d}{dS} \left(\oint_{\Delta l} \mathbf{a} d\mathbf{l} \right) \cdot \mathbf{I}_n.$$

Возьмем от этого выражения интеграл по всей поверхности S натянутой на контур L :

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{a} dS = \oint_L \mathbf{a} d\mathbf{l}. \quad (\text{П.1.30})$$

Полученное утверждение известно как **теорема Стокса**.

Теорема. Циркуляция вектора \mathbf{a} по замкнутому контуру L равна интегралу по поверхности S , опирающейся на этот контур, от ротора вектора \mathbf{a} или равна потоку вектора $\text{rot}_n \mathbf{a}$ через поверхность, натянутую на этот контур L .

Пояснение: когда мы берем интеграл по всей поверхности S , то интегралы $\oint_{\Delta l} \mathbf{a} d\mathbf{l}$, взятые вдоль границ «частичных» контуров взаимно уничтожаются и остаются только части контуров, совпадающих с внешней границей – контуром L .

На рис. П.6 показаны примеры полей для случаев, когда $\text{rot } \mathbf{a} \neq 0$ и $\text{rot } \mathbf{a} = 0$.

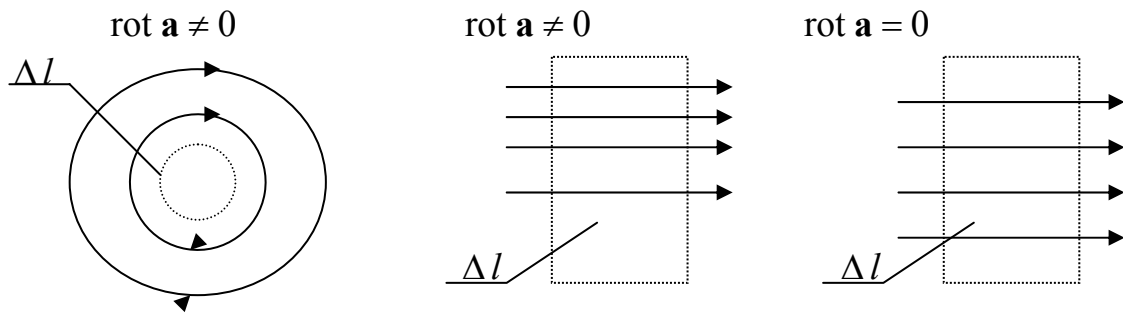


Рис. П.6

Запишем формулу для *полного вектора* $\text{rot } \mathbf{a}$ через его проекции на оси декартовой системы координат:

$$\text{rot } \mathbf{a} = \mathbf{e}_x \underbrace{\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right)}_{\text{rot}_x a} + \mathbf{e}_y \underbrace{\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right)}_{\text{rot}_y a} + \mathbf{e}_z \underbrace{\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right)}_{\text{rot}_z a} \quad (\text{П.1.31})$$

или, в сокращенной записи:

$$\text{rot } \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \partial & \partial & \partial \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}. \quad (\text{П.1.32})$$

Видно, что везде выполняется циклическая перестановка (см. рис. П.2).

Сравнив теперь эту формулу с общей формулой для векторного произ-

ведения [формула (П.1.2а)], можно записать $\text{rot } \mathbf{a}$ через *оператор Гамильтона*:

$$\text{rot } \mathbf{a} \equiv [\nabla, \mathbf{a}]. \quad (\text{П.1.33})$$

Воспользовавшись теперь формулой (П.1.8), можно записать для ротора и его k -й компоненты следующие выражения:

$$[\nabla, \mathbf{a}] = \sum_{i,k,l} \varepsilon_{ikl} \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \mathbf{e}_l, \quad (\text{П.1.34})$$

$$[\nabla, \mathbf{a}]_k = \sum_{m,n} \varepsilon_{kmn} \frac{\partial a_n}{\partial x_m}.$$

Величина $[\nabla, \mathbf{a}]$ существует в каждой точке векторного поля \mathbf{a} и представляет собой вектор, направленный по правилу векторного произведения. Следовательно, $\text{rot } \mathbf{a}$ образует векторное поле, определенное в той же части пространства, где задано поле вектора \mathbf{a} .

В произвольных ортогональных криволинейных координатах

$$\text{rot } \mathbf{a} \equiv \nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \frac{\mathbf{e}_1}{h_2 h_3} & \frac{\mathbf{e}_2}{h_3 h_1} & \frac{\mathbf{e}_3}{h_1 h_2} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 a_1 & h_2 a_2 & h_3 a_3 \end{vmatrix}. \quad (\text{П.1.35})$$

Видно, что здесь также выполняется циклическая перестановка индексов.

Дадим теперь *сводку основных формул через оператор Гамильтона*:

$$\underbrace{\nabla \varphi \equiv \text{grad } \varphi}_{\substack{\text{векторная} \\ \text{функция} \\ \text{скалярного} \\ \text{аргумента}}} \quad \underbrace{\nabla \mathbf{a} \equiv \text{div } \mathbf{a}}_{\substack{\text{скалярная} \\ \text{функция} \\ \text{векторного} \\ \text{аргумента}}} \quad \underbrace{[\nabla, \mathbf{a}] \equiv \text{rot } \mathbf{a}}_{\substack{\text{векторная} \\ \text{функция} \\ \text{векторного} \\ \text{аргумента}}} \quad (\text{П.1.36})$$

1.2.4. Скалярный оператор Лапласа

$$\Delta \equiv \nabla^2 \equiv \text{div grad};$$

$$\nabla^2 \varphi \equiv \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (\text{П.1.37})$$

Оператор Лапласа определяется также через оператор Гамильтона:

(а) в произвольных ортогональных криволинейных координатах:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \right) \right], \quad (\text{П.1.38а})$$

(б) в цилиндрических координатах:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \quad (\text{П.1.38б})$$

(в) в сферических координатах:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}. \quad (\text{П.1.38в})$$

В заключение, приведем сводку основных дифференциальных формул векторного анализа.

**Дифференциальные формулы
векторного анализа**

- | | |
|---|--|
| 1. $\text{grad } \varphi \psi = \varphi \text{ grad } \psi + \psi \text{ grad } \varphi$ | 5. $\text{rot grad } \varphi = 0$ |
| 2. $\text{div } \varphi \mathbf{F} = \varphi \text{ div } \mathbf{F} + \mathbf{F} \text{ grad } \varphi$ | 6. $\text{rot rot } \mathbf{F} = \text{grad div } \mathbf{F} - \nabla^2 \mathbf{F}$ |
| 3. $\text{div } [\mathbf{F}, \mathbf{G}] = \mathbf{G} \text{ rot } \mathbf{F} - \mathbf{F} \text{ rot } \mathbf{G}$ | 7. $\text{rot } \varphi \mathbf{F} = \varphi \text{ rot } \mathbf{F} + [\nabla \varphi, \mathbf{F}]$ |
| 4. $\text{div rot } \mathbf{F} = 0$ | 8. $\text{grad } f(\xi) = f'(\xi) \text{ grad } \xi$ |

Знание этих формул, определений векторного произведения, скалярного произведения, градиента, дивергенции и ротора, а также теорем Остроградского-Гаусса и Стокса позволяет решать все задачи векторного анализа.

2. Формулы вычисления средних величин

Средним значением функции $\Phi(u_1, u_2)$, где u_1, u_2 – функции вида $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ (см. формулу (*) в пп. 5.1.2), называется величина

$$\overline{\Phi(u_1, u_2)} = \frac{1}{T} \int_0^T \Phi(u_1, u_2) dt. \quad (\text{П.2.1})$$

Соответственно,

$$\bar{\mathbf{u}} = 0, \quad (\text{П.2.2})$$

$$\overline{\mathbf{u}^2} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}_m \dot{\mathbf{u}}_m^* = \frac{1}{2} (u_{mx}^2 + u_{my}^2 + u_{mz}^2), \quad (\text{П.2.3})$$

$$\overline{u_1 u_2} = \frac{1}{2} \text{Re} \dot{\mathbf{u}}_{1m} \dot{\mathbf{u}}_{2m}^* = \frac{1}{2} \text{Re} \dot{\mathbf{u}}_{1m}^* \dot{\mathbf{u}}_{2m}, \quad (\text{П.2.4})$$

$$[\overline{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2}] = \frac{1}{2} \text{Re} [\dot{\mathbf{u}}_{1m}, \dot{\mathbf{u}}_{2m}^*] = \frac{1}{2} \text{Re} [\dot{\mathbf{u}}_{1m}^*, \dot{\mathbf{u}}_{2m}]. \quad (\text{П.2.5})$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никольский В.В.* Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, 1978. 544 с.
2. *Белашов В.Ю., Чураев Р.Р.* Сборник задач по курсу «Электромагнитная теория и ЭМС электротехнических устройств». Казань: КГЭУ, 2006. 123 с.
3. *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Теория поля: М.: Наука, 1973. 503 с.
4. *Терлецкий Я.П., Рыбаков Ю.П.* Электродинамика: М.: Высшая школа, 1980. 335 с.
5. *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Механика. Электродинамика: М.: Наука, 1973, 1969, 271с.
6. *Батыгин В.В., Топтыгин И.Н.* Сборник задач по электродинамике: М.: Наука, 1970. 503 с.
7. *Матвеев А.Н.* Электродинамика: М.: Высшая школа, 1980. 383 с.
8. *Говорков В.А.* Электрические и магнитные поля. М.: Энергия, 1968. 488 с.
9. *Красюк Н.П., Дымович Н.Д.* Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Высш. школа, 1974. 536 с.
10. *Хабигер Э.* Электромагнитная совместимость. Основы её обеспечения в технике. М.: Энергоатомиздат, 1995. 304 с.
11. *Фейнман Р. и др.* Фейнмановские лекции по физике. Т. 6. Электродинамика. М.: Наука, 1969. 271 с.
12. *Вычислительные методы в физике плазмы / Под. ред. Б. Ольдера и др.* М.: Мир, 1974. 514 с.
13. *Туровский Я.* Техническая электродинамика. М.: Энергия, 1974. 488 с.
14. *Гольдштейн Л.Д., Зернов Н.В.* Электромагнитные поля и волны. М.: Изд-во «Советское радио», 1971. 664 с.

Василий Юрьевич Белашов

**ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ТЕОРИЯ И ЭМС
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ**

Часть. I. Электромагнитная теория

Учебное пособие по курсу
"Электромагнитная теория и ЭМС электротехнических устройств"

(Кафедра электрооборудования и электрохозяйства предприятий,
организаций и учреждений КГЭУ)

Редактор издательского отдела *Г.Я. Дарчинова*
Компьютерный набор и верстка *В.Ю. Белашова*

Изд. лиц. № 155 от 30.10.95
Подписано к печати
Гарнитуры "Times", "Arial"
Физ. печ. л.
Тираж 200 экз.

Темплан издания КГЭУ 2007 г.
Формат 60×84/16
Вид печати РОМ
Усл. печ. л.
Заказ №

Бумага "Business"
Уч.-изд. л.

Издательский отдел КГЭУ
420066, Казань, Красносельская, 51

Типография КГЭУ
420066, Казань, Красносельская, 51